ĐỀ 6

Bài 1: Cho hai biểu thức

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\frac{1}{x-\sqrt{x}}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{2}{x-1}\right) \qquad \text{với } x>0;\ x\neq 1$$

a) Với x>0, x $\neq$ 1 ta có

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}\right)$$

$$A = \frac{1+x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}:\frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$$

$$A = \frac{x+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}.(\sqrt{x}-1)$$

$$A = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$$

b) A=2 $\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}=2 \Leftrightarrow x+1=2\sqrt{x} \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)^2=0$

$\Leftrightarrow x=1(\textit{không}$ tm)

Vậy không có giá trị nào của x để A=2

c) $P=(A-4)\sqrt{x}=\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}-4\right)\sqrt{x}=\dfrac{x+1-4\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.\sqrt{x}=x-4\sqrt{x}+1$

$= \ x-4\sqrt{x}+4\ \ -3=\ \sqrt{x}-2\ ^{2}-3\geq -3$

$P\geq -3$

Dấu bằng xảy ra khi x=2 (TMĐK)

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là -3 khi x=2.

Bài 2: Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{x-1}+\dfrac{4}{2y+1}=5 \\ \dfrac{3}{x-1}-\dfrac{4}{2y+1}=-1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{y-3}=5 \\ 5\sqrt{x-1}+\dfrac{3}{y-3}=13 \end{cases}$

a) Điều kiện: $x \neq 1$ và $y \neq \dfrac{-1}{2}$.

Đặt $a=\dfrac{1}{x-1}$ và $b=\dfrac{4}{2y+1}$. Hệ phương trình trở thành:

$\begin{cases} a+b=5 \\ 3a-b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ 4a=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=5-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=4 \end{cases}$.

Suy ra $\begin{cases} \dfrac{1}{x-1}=1 \\ \dfrac{4}{2y+1}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ 2y+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x; y) = $(2;\,0)$.

b) ĐK: $x \geq 1$; $y \neq 3$

Đặt:

$\sqrt{x-1}=a, \dfrac{1}{y-3}=b \quad a \geq 0; b \neq 0$

$\Rightarrow \begin{cases} 2a+b=5 \\ 5a+3b=13 \end{cases}$

Ta giải được a=1 và b=1 TMĐK

Từ đó tìm được $\begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}$ TMĐK

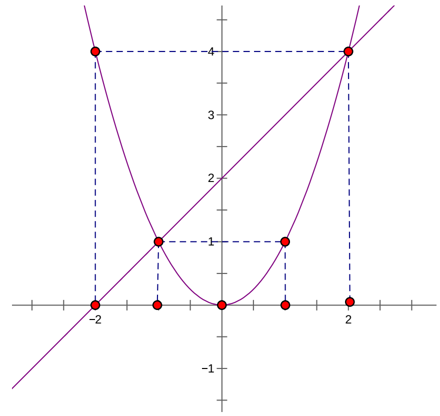
Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x;y) = (5;4)

Bài 3: Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): y = x + 2

a) Vẽ hai đồ thị của hàm số này trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4



x	0	-2
y= x + 2	2	0

b) *) Thay x = - 4;y = 16 vào (P) ta có: $16 = (-4)^2$ (luôn đúng)

Vậy A $\in$ (P)

*) Thay x = $\frac{-1}{2}$ vào (P) ta có: $0 = \frac{-1}{2}$ (vô lý)

=> B $\notin$ (P)

c) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d)

$x^2 = x + 2$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Với x = -1 => y = 1

Với x = 2 =>y = 4

Vậy tọa độ giao điểm của (d) và(P) là: (-1;1); (2; 4)

Bài 4: Gọi chiều dài của mảnh vườn lúc đầu là x (m)

Chiều rộng của mảnh vườn lúc đầu là y (x > y > 0; m)

Vì chu vi mảnh vườn trước đây là 124m nên ta có phương trình: (x + y).2 = 124

$\Leftrightarrow$ x + y = 62 (1)

Chiều dài mở rộng thêm 5m nên chiều dài mới là: x + 5 (m)

Chiều rộng thêm 3m nên chiều rộng mới là: y+ 3 (m)

Diện tích mảnh vườn sau khi tăng thêm chiều dài, chiều rộng là: (x + 5)(y + 3) (m^2)

Vì diện tích mảnh vườn tăng thêm 255m^2 nên ta có phương trình: (x + 5)(y + 3) = xy + 255 (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

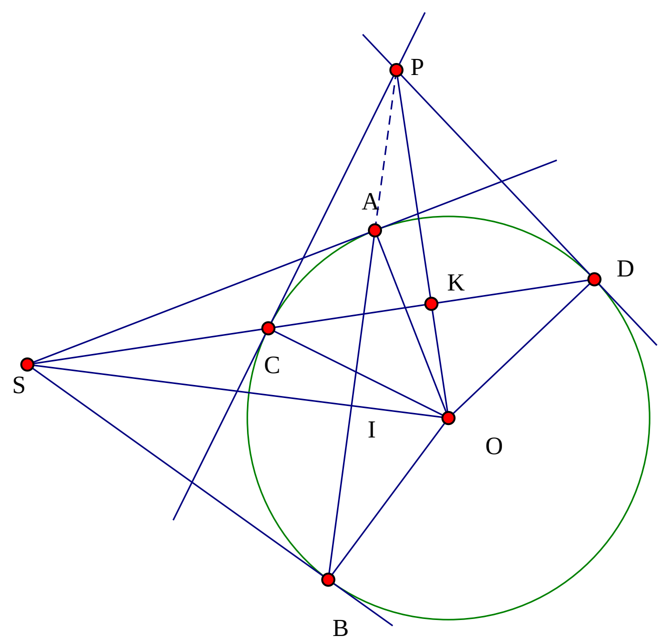
$$\begin{cases} x+y=62 \\ (x+5)(y+3)=xy+255 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình tìm được: $\begin{cases} x=35 \\ y=27 \end{cases}(t/m)$

Vậy chiều dài mảnh vườn lúc đầu là: 35m; chiều rộng mảnh vườn lúc đầu là 27m

Bài 5: Cho đường tròn (*O*) và một điểm *S* nằm ngoài (*O*). Từ *S* vẽ các tiếp tuyến *SA*, *SB* với đường tròn (*O*) (*A*,*B* là tiếp điểm).

a) Chứng minh rằng bốn điểm *S, A, O, B* cùng thuộc một đường tròn.
b) Vẽ cát tuyến *SCD* không đi qua tâm *O* của đường tròn (*O*) sao cho điểm *C* nằm giữa *S* và *D*. Các tiếp tuyến tại điểm *C* và điểm *D* của đường tròn (*O*) cắt nhau tại điểm *P*. Gọi *I* là giao điểm của *AB* và *SO*, *K* là giao điểm của *CD* và *PO*. Chứng minh rằng *OI.OS* = *OK.OP*.
c) Chứng minh ba điểm *P, A, B* thẳng hàng.



a) Xét đường tròn (*O*) ta có *SA* là tiếp tuyến (với *A* là tiếp điểm) nên $SA \perp OA \Rightarrow \angle SAO = 90^0$ $\Rightarrow \Delta SAO$ nội tiếp đường tròn đường kính *SO* ⇒*S, A, O* cùng thuộc đường tròn đường kính *SO* (1).
Chứng minh tương tự: *S, B, O* cùng thuộc đường tròn đường kính *SO* (2).
Từ (1) và (2) ta có *S, A, O, B* cùng nằm trên một đường tròn.
b) Xét đường tròn (*O*) ta có *SA, SB* là hai tiếp tuyến cắt nhau tại *S* (*A, B* là hai tiếp điểm) nên *SA* = *SB* (Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)
⇒tam giác *SAB* cân tại *S*. Lại có: *SO* là phân giác của góc *ASB* ⇒ *SI* cũng là phân giác của góc *ASB* và cũng là đường cao của tam giác *SAB* $\Rightarrow SI \perp AB$
tại I. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SAO, đường cao AI ta có:
$OA^2 = OI.OS$ (3).

Chứng minh tương tự ta có: $OC^2 = OK.OP$ (4) mà $OA = OC$ (Cùng là bán kính đường tròn (O)). Từ (3) và (4) $\Rightarrow OI.OS = OK.OP$ (đpcm).

c) Từ b) ta có $OI.OS = OK.OP \Rightarrow \dfrac{OK}{OI} = \dfrac{OS}{OP}$

Xét hai tam giác OKS và OIP có

$\begin{cases} \dfrac{OK}{OI} = \dfrac{OS}{OP} \\ \angle SOK = \angle POI \end{cases} \Rightarrow \Delta OKS$ đồng dạng ΔOIP (c.g.c)

$\Rightarrow \angle OKS = \angle OIP$ (góc tương ứng) $\Rightarrow \angle OIP = 90^0$

$\Rightarrow IP \perp OS$ tại I. Mặt khác: $AB \perp OS$ tại $I \Rightarrow P, A, B$ thẳng hàng (đpcm).

Bài 6 Giải phương trình: $x(3-\sqrt{3x-2}) = \sqrt{3x^2+7x-6} - x\sqrt{x+3} + 2$.

ĐK: $\begin{cases} 3x-2 \ge 0 \\ 3x^2+7x-6 \ge 0 \\ x+3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge \dfrac{2}{3}$

Biến đổi phương trình ta có:

$3x-2-x\sqrt{3x-2}-\sqrt{(3x-2)(x+3)}+x\sqrt{x+3}=0$

$\Leftrightarrow [(\sqrt{3x-2})^2 - x\sqrt{3x-2}] - (\sqrt{3x-2}.\sqrt{x+3} - x\sqrt{x+3}) = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{3x-2}(\sqrt{3x-2}-x) - \sqrt{x+3}(\sqrt{3x-2}-x) = 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{3x-2}-x)(\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+3}) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{3x-2}-x=0 \\ \sqrt{3x-2}-\sqrt{x+3}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{3x-2}=x \\ \sqrt{3x-2}=\sqrt{x+3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x+2=0 \\ 3x-2=x+3 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1(tm) \\ x=2(tm) \\ x=\dfrac{5}{2}(tm) \end{array}\right.$

Vậy phương trình có các nghiệm là $x=1$ hoặc $x=2$ hoặc $x=\dfrac{5}{2}$.

ĐỀ 7

Bài 1: Cho biểu thức: $P=\left(\frac{1}{\sqrt{a}+2}+\frac{1}{\sqrt{a}-2}\right).\frac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}}.\left(a>0;\ a\neq 4\right)$

a) Rút gọn P;

$P=\left(\frac{1}{\sqrt{a}+2}+\frac{1}{\sqrt{a}-2}\right).\frac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}}$

$=\left(\frac{\sqrt{a}-2+\sqrt{a}+2}{\left(\sqrt{a}-2\right)\left(\sqrt{a}+2\right)}\right).\frac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}}$

$=\frac{2\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}-2\right)\left(\sqrt{a}+2\right)}.\frac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}}$

$=\frac{2}{\sqrt{a}+2}$

Vậy $P=\frac{2}{\sqrt{a}+2}$

b) Tìm các giá trị của a để $P>\frac{1}{3}$;

$$P>\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{2}{\sqrt{a}+2}>\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{6-\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}+2}>0$$

$$\Leftrightarrow\frac{4-\sqrt{a}}{3(\sqrt{a}+2)}>0$$

Vì $3(\sqrt{a}+2)>0$ nên $4-\sqrt{a}>0\Leftrightarrow\sqrt{a}<4\Leftrightarrow 0<a<16$

Kết hợp với ĐKXĐ $\Rightarrow 0 < a < 16$ và $a \neq 4$

c) Tìm tất cả các giá trị của a để $Q=\frac{9}{4}P$ có giá trị nguyên.

$Q=\frac{9}{2\left(\sqrt{a}+2\right)}$

* $a\geq 0\Rightarrow Q=\frac{9}{2\left(\sqrt{a}+2\right)}>0$

* $a\geq 0\Rightarrow\sqrt{a}\geq 0\Leftrightarrow\sqrt{a}+2\geq 2\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{a}+2\right)\geq 2.2\Leftrightarrow\frac{9}{2\left(\sqrt{a}+2\right)}\leq\frac{9}{4}$

$\Rightarrow 0<Q<\frac{9}{4};Q\in Z$

$\Rightarrow Q\in\left\{1;2\right\}$

$\Rightarrow a\in\left\{\frac{1}{16};\frac{25}{4}\right\}$

Bài 2: Cho hai đường thẳng: d_1: $mx-2(3n+2)y=6$ và d_2: $(3m-1)x+2ny=56$. Tìm các giá trị của tham số m và n để d_1, d_2 cắt nhau tại điểm I $(2;-5)$.

$$\begin{matrix}(d_1): mx-2(3n+2)y=6 \\ (d_2): (3m-1)x+2ny=56\end{matrix} \Leftrightarrow (d_1) \text{ cắt } (d_2) \text{ tại } I(2;-5)$$

$\Rightarrow$ Hệ phương trình: $\begin{cases} mx-2(3n+2)y=6 \\ (3m-1)x+2ny=56 \end{cases}$ có nghiệm $\begin{cases} x=2 \\ y=-5 \end{cases}$

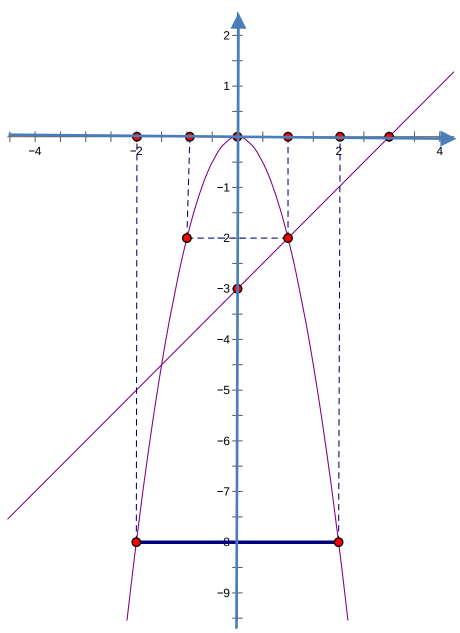
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m+10(3n+2)=6 \\ (3m-1)2-10n=56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+30n=-14 \\ 6m-10n=58 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6m+90n=-42 \\ 6m-10n=58 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 100n=-100 \\ 2m+30n=-14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n=-1 \\ 2m-30=-14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=-1 \\ 2m=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=-1 \\ m=8 \end{cases}$$

Vậy $\begin{cases} m=8 \\ n=-1 \end{cases}$ thì d_1, d_2 cắt nhau tại điểm I $(2;-5)$.

Bài 3: Cho parabol (P): y = - $2x^2$ và đường thẳng (d): y = x – 3

a) Vẽ đồ thị của hàm số này trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy



b) Tại x = 5 thay vào (P) có: y = - 2.5^2 = -50

Vậy tại điểm có hoành độ x =5 thuộc (P) thì y = - 50

c)Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d)

$-2x^2$ = x- 3

$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 2x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (2x + 3)(x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+3=0 \\ x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{3}{2} \\ x=1 \end{array}\right.$

Với $x=\dfrac{-3}{2} \Rightarrow y=\dfrac{-9}{2}$

Với x = 1 => y = -2

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là: (1; -2) ; $\left(\dfrac{-3}{2};\dfrac{-9}{2}\right)$

Bài 4: Gọi số học sinh lớp 9A là x (học sinh; x $\in N^*$)

Số học sinh lớp 9B là y (học sinh, y $\in N^*$)

Vì cả 2 lớp có 81 bạn nên ta có phương trình: x + y = 81 (1)

Số cây lớp 9A trồng được là: 5x (cây)

Số cây lớp 9B trồng được là 4y (cây)

Vì cả hai lớp trồng được 364 cây nên ta có phương trình: 5x + 4y = 364 (2)

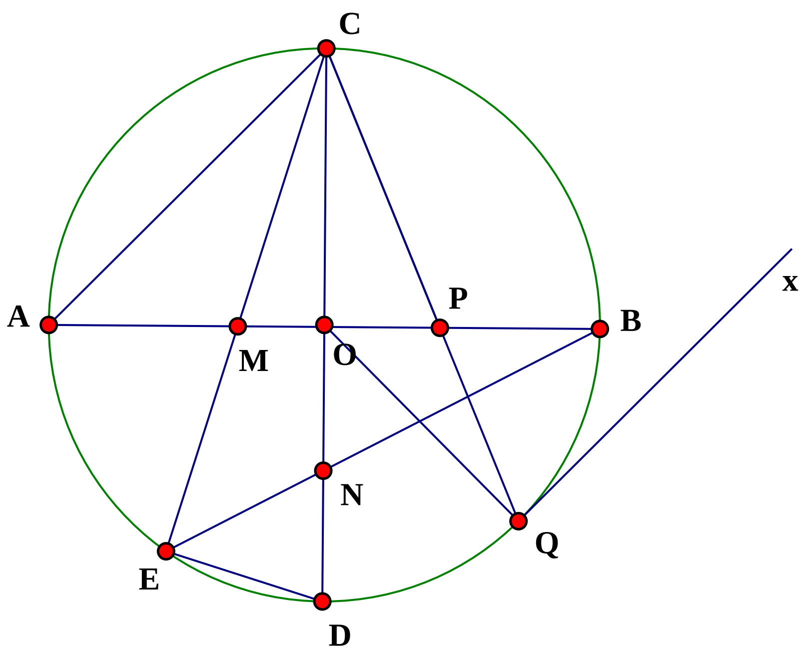
Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=81 \\ 5x+4y=364 \end{cases}$

Giải hệ phương trình tìm được: $\begin{cases} x=40 \\ y=41 \end{cases}(t/m)$

Vậy lớp 9A có 40 học sinh; lớp 9B có 41 học sinh

Bài 5: Cho đường tròn (*O*) có hai đường kính *AB* và *CD* vuông góc với nhau. Gọi *E* là một điểm trên cung nhỏ *AD* (*E* khác *A* và *D*), nối *EC* cắt *OA* tại *M*. Trên tia *AB* lấy điểm *P* sao cho *AP* = *AC*, tia *CP* cắt đường tròn (*O*) tại điểm thứ hai là *Q*.

a) Chứng minh rằng bốn điểm *D, E, M, O* cùng thuộc một đường tròn.
b) Vẽ tiếp tuyến *Qx* tại *Q* của đường tròn (*O*). Chứng minh *Qx* luôn song song với *AC*.
c) Chứng minh $AM.ED=\sqrt{2}.OM.EA$.
d) Nối *EB* cắt *OD* tại *N*, xác định vị trí của điểm *E* để $\dfrac{OM}{AM}+\dfrac{ON}{DN}$ đạt giá trị nhỏ nhất.



a) Xét đường tròn (O) đường kính AB ta có $\angle MED = 90^0$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \Delta$ MED nội tiếp đường tròn đường kính MD $\Rightarrow M, E, D$ cùng thuộc đường tròn đường kính MD (1).

Lại có: $AB \perp CD$ nên ΔMOD vuông tại $O \Rightarrow \Delta MOD$ nội tiếp đường tròn đường kính MD $\Rightarrow$ *M*, *O*, *D* cùng thuộc đường tròn đường kính *MD* (2).

Từ (1) và (2) ta có bốn điểm *D*, *E*, *M*, *O* cùng thuộc một đường tròn.

b) Vì $AP = AC$ (gt) $\Rightarrow$ ΔACP cân tại A $\Rightarrow \angle ACP = \angle APC$ (3).

Xét (*O*) có $\angle APC = \angle CQx$ (4) (*APC* là góc có đỉnh ở bên trong đường tròn chắn hai cung *AC* và *QB*; góc CQx là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung chắn cung *CQ*) . Từ (3) và (4) ta có $\angle ACP = \angle CQx$. Mà hai góc lại ở vị trí so le trong nên *Qx* // *AC*.

c) +)Xét ΔAMC và ΔEAC có $\begin{cases} \angle MAC = \angle AEC \\ \angle ACM = \angle ECA \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta AMC$ và ΔEAC đồng dạng (g-g) $\Rightarrow \dfrac{AM}{EA} = \dfrac{AC}{CE}$ (5)

+)Xét ΔCOM và ΔCED có $\begin{cases} \angle COM = \angle CED = 90^0 \\ \angle OCM = \angle ECD \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta COM$ và ΔCED đồng dạng (g-g) $\Rightarrow \dfrac{OM}{ED} = \dfrac{CO}{CE}$ (6) mà ΔAOC vuông cân tại O

$\Rightarrow AC = \sqrt{2}OC$ (7).

Từ (5), (6) và (7) ta được $AM.ED = \sqrt{2}.OM.EA$.

d) Tương tự chứng minh ở c) ta chứng minh được:

+) ΔBON và ΔBEA đồng dạng (g.g) $\Rightarrow \frac{BO}{BE} = \frac{ON}{EA}$.

+) ΔBND và ΔBDE đồng dạng (g.g) $\Rightarrow \frac{DN}{ED} = \frac{BD}{BE} = \frac{\sqrt{2}BO}{BE}$

$\Rightarrow \frac{DN}{ED} = \frac{\sqrt{2}ON}{EA} \Rightarrow \frac{ON}{DN} = \frac{EA}{\sqrt{2}ED}$.

Từ c) ta cũng có: $\frac{OM}{AM} = \frac{ED}{\sqrt{2}EA} \Rightarrow \frac{ON}{DN}.\frac{OM}{AM} = \frac{1}{2}$

Theo bất đẳng thức Cô-Si ta có: $\frac{OM}{AM} + \frac{ON}{DN} \ge 2\sqrt{\frac{OM}{AM}.\frac{ON}{DN}} = \sqrt{2}$

Đẳng thức xảy ra khi *ED* = *EA* hay *E* là điểm chính giữa cung nhỏ *AD*.

Vậy $\frac{OM}{AM} + \frac{ON}{DN}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi *E* là điểm chính giữa cung nhỏ *AD*.

Bài 6: Cho hai số thực $x, y > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1}$.

Vì $x, y > 1 \Rightarrow x-1 > 0, y-1 > 0$. Áp dụng BĐT Cô- Si cho hai số dương ta có:

$$P = \frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1} \ge 2\sqrt{\frac{x^2}{y-1}.\frac{y^2}{x-1}} = \frac{2xy}{\sqrt{(x-1).(y-1)}}$$

Lại có: $x = (x-1)+1 \ge 2\sqrt{x-1} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x-1}} \ge 2\,(1)$

Chứng minh tương tự ta cũng có: $\frac{y}{\sqrt{y-1}} \ge 2\,(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{xy}{\sqrt{(x-1).(y-1)}} \ge 4 \Rightarrow P \ge 8$

Vậy $P_{\min} = 8 \Leftrightarrow x = y = 2$.