



ĐẠI SỐ

Bài 1. Cho biểu thức $A = \frac{x+2}{x+3} - \frac{5}{x^2+x-6} + \frac{1}{2-x}$

- a) Rút gọn biểu thức A
b) Tìm x để $A > 0$
c) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để A nguyên dương.

Giải

a) $A = \frac{x+2}{x+3} - \frac{5}{x^2+x-6} + \frac{1}{2-x}$ (đk $x \neq 2; x \neq -3$)

$$A = \frac{x+2}{x+3} - \frac{5}{(x+3)(x-2)} - \frac{1}{x-2}$$

$$A = \frac{x^2 - 4 - 5 - (x+3)}{(x+3)(x-2)}$$

$$A = \frac{x^2 - x - 12}{(x+3)(x-2)}$$

$$A = \frac{(x+3)(x-4)}{(x+3)(x-2)}$$

$$A = \frac{x-4}{x-2}$$

b) Với $x \neq 2; x \neq -3$ ta có $A = \frac{x-4}{x-2}$

$$A > 0 \Leftrightarrow \frac{x-4}{x-2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 > 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x < 2 \end{cases}$$

Vậy với $\begin{cases} x > 4 \\ x < 2 \end{cases}$ và $x \neq -3$ thì $A > 0$

c) $A = \frac{x-4}{x-2} = \frac{x-2-2}{x-2} = 1 - \frac{2}{x-2}$

A nhận giá trị nguyên dương khi $\frac{2}{x-2}$ có giá trị nguyên nhỏ hơn hoặc bằng 0

Vì x nguyên nên $\begin{cases} x-2 \in \mathbb{U}(2) \\ x-2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2 = -1 \\ x-2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \end{cases}$

Đổi chiếu với ĐKXD thấy $x = 1; x = 0$ thỏa mãn

Vậy $x \in \{1; 0\}$

Bài 2. Cho các biểu thức $A = \frac{2x^2+2x}{1-x^2}$ và $B = \frac{1-2x}{x^2-3x+2} + \frac{x+1}{x-2}$

- a) Rút gọn biểu thức A, B;
b) Tính giá trị của A khi $|x-2|=3$;
c) Tính $C = A - B$;
d) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $C \in \mathbb{Z}$.

Giải

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{2x^2 + 2x}{1 - x^2} \quad (\text{ĐK: } x \neq \pm 1) \\ &= -\frac{2x(x+1)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{-2x}{x-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{1-2x}{x^2-3x+2} + \frac{x+1}{x-2} \quad (\text{ĐK: } x \neq 1; x \neq 2) \\ &= \frac{1-2x}{(x-1)(x-2)} + \frac{x^2-1}{(x-1)(x-2)} \\ &= \frac{x^2-2x}{(x-1)(x-2)} \\ &= \frac{x(x-2)}{(x-1)(x-2)} \\ &= \frac{x}{x-1} \end{aligned}$$

$$\text{b) } |x-2|=3; \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=3 \\ x-2=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-1 \end{cases}$$

Đổi chiều với ĐKXD ta thấy $x = -1$ không thỏa mãn, $x = 5$ thỏa mãn

$$\text{Với } x = 5 \text{ ta có } A = \frac{-2.5}{5-1} = \frac{-5}{2}$$

$$\text{c) } C = A - B = \frac{-2x}{x-1} - \frac{x}{x-1} = \frac{-3x}{x-1}$$

$$\text{d) } C = \frac{-3x}{x-1} = \frac{-3x+3}{x-1} - \frac{3}{x-1} = -3 - \frac{3}{x-1}$$

Với $x \in \mathbb{Z}$ thì $C \in \mathbb{Z}$ khi và chỉ khi $x-1 \in U(3) \Leftrightarrow x-1 \in \{\pm 1; \pm 3\} \Leftrightarrow x \in \{-2; 0; 2; 4\}$

Đổi chiều với ĐKXD ta được $x \in \{-2; 0; 4\}$

Bài 3. Cho biểu thức $A = \frac{2x}{x+3} + \frac{x+1}{x-3} + \frac{3-11x}{9-x^2}$ và $B = \frac{x-3}{x+1}$ với $0 \leq x \neq 9$.

a) Rút gọn A;

b) Với $P = A.B$, tìm x để $P = \frac{9}{2}$.

c) Tìm x để $B < 1$

d) Tìm số nguyên x để $P = A.B$ là số nguyên.

Giải

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{2x}{x+3} + \frac{x+1}{x-3} + \frac{3-11x}{9-x^2} \quad (\text{ĐKXD: } x \neq 3) \\ &= \frac{2x(x-3)}{(x+3)(x-3)} + \frac{(x+1)(x+3)}{(x+3)(x-3)} + \frac{11x-3}{(x+3)(x-3)} \\ &= \frac{2x^2 - 6x + x^2 + 4x + 3 + 11x - 3}{(x+3)(x-3)} \\ &= \frac{3x^2 + 9x}{(x+3)(x-3)} \\ &= \frac{3x(x+3)}{(x+3)(x-3)} \\ &= \frac{3x}{x-3} \end{aligned}$$

$$b) P = A.B = \frac{3x}{x-3} \cdot \frac{x-3}{x+1} = \frac{3x}{x+1} \quad (\text{ĐKXD: } x \neq 3)$$

$$P = \frac{9}{2} \Rightarrow \frac{3x}{x+1} = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow 6x = 9x + 9$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \quad (\text{Không thỏa mãn ĐK } 0 \leq x \neq 9)$$

Vậy không có giá trị nào của x để $P = \frac{9}{2}$.

$$c) B = \frac{x-3}{x+1} < 1 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+1} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{x-3-x-1}{x-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{-4}{x-1} < 0 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Kết hợp với ĐK $0 \leq x \neq 9$ ta được $1 < x \neq 9$

$$d) P = \frac{3x}{x+1} = 3 - \frac{3}{x+1}$$

Với $x \in \mathbb{Z}$ thì $P \in \mathbb{Z}$ khi và chỉ khi $x+1 \in U(3) \Leftrightarrow x+1 \in \{\pm 1; \pm 3\} \Leftrightarrow x \in \{-4; -2; 0; 2\}$

Đổi chiều với ĐK $0 \leq x \neq 9$ ta được $x \in \{0; 2\}$

Bài 4. Giải phương trình:

$$a) 4x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

Tập nghiệm của phương trình $S = \left\{ \frac{5}{2} \right\}$

$$b) 7 - 3x = 9 - x \Leftrightarrow x = -1$$

Tập nghiệm của phương trình $S = \{-1\}$

$$\begin{aligned} & 2x - (3 - 5x) = 4(x + 3) \\ c) & \Leftrightarrow 2x + 5x - 4x = 3 + 12 \\ & \Leftrightarrow 3x = 15 \\ & \Leftrightarrow x = 5 \end{aligned}$$

Tập nghiệm của phương trình $S = \{5\}$

$$d) (5x - 4)(4x + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 4 = 0 \\ 4x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Tập nghiệm của phương trình $S = \left\{ \frac{4}{5}; -\frac{3}{2} \right\}$

$$e) (3x - 1)(x + 3) = (2 + x)(1 - 3x)$$

$$\Leftrightarrow [(3x - 1)(x + 3) - (2 + x)(1 - 3x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x - 1)(x + 3 + 2 + x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x - 1)(2x + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = \frac{-5}{2} \end{cases}$$

Tập nghiệm của phương trình $S = \left\{ \frac{1}{3}; \frac{-5}{2} \right\}$

$$\begin{aligned} & (x+3)^2 - (x-3)^2 = 6x+18 \\ \text{f) } & \Leftrightarrow (x+3+x-3)[(x+3)-(x-3)] = 6x+18 \\ & \Leftrightarrow 2x \cdot 6 = 6x+18 \\ & \Leftrightarrow x = 3 \end{aligned}$$

Tập nghiệm của phương trình $S = \{3\}$

$$\text{g) } \frac{x}{3} - \frac{5x}{6} - \frac{15x}{12} = \frac{x}{4} - 5$$

$$\Leftrightarrow 4x - 10x - 15x = 3x - 60$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

Tập nghiệm của phương trình $S = \left\{ \frac{5}{2} \right\}$

$$\text{h) } \frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{15} - \frac{2x-13}{6} = 0$$

$$\Leftrightarrow 15(x-1) - 2(x+1) - 5(2x-13) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + 48 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -16$$

Tập nghiệm của phương trình $S = \{-16\}$

$$\text{i) } \frac{x-1}{13} - \frac{2x-13}{15} = \frac{3x-15}{27} - \frac{4x-27}{29}$$

$$\frac{x-1}{13} - 1 - \frac{2x-13}{15} + 1 = \frac{3x-15}{27} - 1 - \frac{4x-27}{29} + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1-13}{13} - \frac{2x-13-15}{15} = \frac{3x-15-27}{27} - \frac{4x-27-29}{29}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-14}{13} - \frac{2(x-14)}{15} = \frac{3(x-14)}{27} - \frac{4(x-14)}{29}$$

$$\Leftrightarrow (x-14) \left(1 - \frac{2}{15} - \frac{1}{9} - \frac{4}{29} \right) = 0$$

$$\text{Vì } 1 - \frac{2}{15} - \frac{1}{9} - \frac{4}{29} \neq 0 \text{ nên } (x-14) = 0 \Leftrightarrow x = 14$$

Tập nghiệm của phương trình

Bài 5. Một người đi xe máy đi từ A đến B với vận tốc 40 km/h. Khi đến B người đó trở về A ngay với vận tốc 30 km/h. Vì vậy thời gian cả đi lẫn về hết 7 giờ. Tính quãng đường AB?

Giải: Gọi chiều dài quãng đường AB là x (km; x > 0)

Thời gian xe đi từ A đến B với vận tốc 40km/h là: $\frac{x}{40}$ (giờ)

Thời gian xe đi từ B về A với vận tốc 30km/h là: $\frac{x}{30}$ (giờ)

Vì thời gian cả đi và về là 7 giờ nên ta có phương trình:

$$\begin{aligned}\frac{x}{40} + \frac{x}{30} &= 7 \\ \Leftrightarrow 3x + 4x &= 840 \\ \Leftrightarrow 7x &= 840 \\ \Leftrightarrow x &= 120(t / m)\end{aligned}$$

Vậy chiều dài quãng đường AB là 120km

Bài 6. Một người đi từ A đến B với vận tốc 25km/h. Khi từ B trở về A người đó chọn con đường ngắn hơn đường cũ 15km, nhưng đi với vận tốc 30km/h, nên thời gian về ít hơn thời gian đi là 1 giờ 20 phút. Tính quãng đường AB?

Gọi độ dài quãng đường AB là x (km; $x > 0$)

Thời gian người đó đi từ A đến B với vận tốc 25 km/h là: $\frac{x}{25}$ (giờ)

Quãng đường đi từ B về A là: $x - 15$ (km)

Thời gian người đó đi về từ B về A là: $\frac{x-15}{30}$ (giờ)

Vì thời gian về ít hơn thời gian đi là 1 giờ 20 phút ($= 1\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ giờ) nên ta có phương trình:

$$\begin{aligned}\frac{x}{25} - \frac{x-15}{30} &= \frac{5}{3} \\ \Leftrightarrow 6x - 5(x-15) &= 250 \\ \Leftrightarrow 6x - 5x + 75 &= 250 \\ \Leftrightarrow x &= 175(t / m)\end{aligned}$$

Vậy độ dài quãng đường AB là 175km

Bài 7. Một người đi xe đạp từ A đến B với vận tốc 15km/h. Khi từ B trở về A người đó chọn con đường khác dài hơn đường cũ 5km, nhưng đi với vận tốc 20km/h, nên thời gian về ít hơn thời gian đi là 20ph. Tính quãng đường đi từ A đến B.

Gọi độ dài quãng đường AB là x (km; $x > 0$)

Thời gian người đó đi từ A đến B với vận tốc 15 km/h là: $\frac{x}{15}$ (giờ)

Quãng đường đi từ B về A là: $x + 5$ (km)

Thời gian người đó đi về từ B về A là: $\frac{x+5}{20}$ (giờ)

Vì thời gian về ít hơn thời gian đi là 20 phút ($= \frac{1}{3}$ giờ) nên ta có phương trình:

$$\frac{x}{15} - \frac{x+5}{20} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 4x - 3(x + 5) = 20$$

$$\Leftrightarrow 4x - 3x - 15 = 20$$

$$\Leftrightarrow x = 35(t/m)$$

Vậy độ dài quãng đường AB là 35km

Bài 8

a) EFGH là hình bình hành

↑

$$HE // DB;$$

↑

$$HE // DB; GF // DB$$

↑

↑

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AH}{AD}; \quad \frac{CF}{CB} = \frac{CG}{CD}$$

$$EF // HG$$

↑

$$EF // AC; HG // AC$$

↑

↑

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AH}{AD}; \quad \frac{CF}{CB} = \frac{CG}{CD}$$

b)

$$P_{EFGH} = 2HE + 2EF = 2(HE + EF)$$

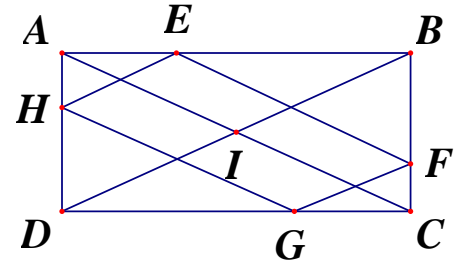
$$EF // AC \Rightarrow \frac{EF}{AC} = \frac{EB}{AB} \Rightarrow EF = \frac{EB}{AB} AC$$

$$HE // BD \Rightarrow \frac{HE}{BD} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow HE = \frac{AE}{AB} BD$$

$$\Rightarrow EF + HE = \frac{EB}{AB} AC + \frac{AE}{AB} BD = \frac{(AE + EB)}{AB} BD = BD \text{ (do } ABCD \text{ là hình chữ nhật } \Rightarrow AC = BD)$$

Vì hình chữ nhật ABCD cố định $\Rightarrow BD$ không đổi $\Rightarrow EF + HE$ không đổi

Vậy P_{EFGH} không đổi.



Bài 9

a) MN // BC

↑

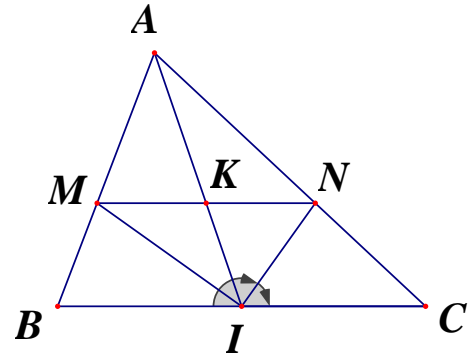
$$\frac{MB}{MA} = \frac{NC}{NA}$$

↑

$$\frac{MB}{MA} = \frac{IB}{IA}; \quad \frac{NC}{NA} = \frac{IC}{IA}; IB = IC$$

↑

↑



MI là phân giác AIB ; NI là phân giác AIC

b) gọi K là giao điểm của MN và AI

+ Chứng minh được $KM = KN$.

$$\text{Thật vậy: } \frac{KM}{BI} = \frac{KN}{IC} \left(= \frac{AK}{AI} \right); BI = IC$$

$\Rightarrow K$ là trung điểm của MN.

+ Vì IM, IN lần lượt là phân giác của $AIB; AIC \Rightarrow \angle MIN = 90^\circ \Rightarrow \triangle MIN$ vuông tại I

$$\text{Xét } \triangle MIN \text{ vuông tại I có IK là đường trung tuyến } \Rightarrow IK = \frac{MN}{2} = \frac{AI}{2}$$

Nên K là trung điểm của AI.

+ Tứ giác AMIN có 2 đường chéo AI, MN cắt nhau tại K là trung điểm mỗi đường nên AMIN là hình bình hành

Lại có $AI = MN \Rightarrow AMIN$ là hình chữ nhật $\Rightarrow MAN = 90^\circ$

Vậy tam giác ABC vuông tại A .

c) Để $MN \perp AI$, mà $MN \parallel BC \Rightarrow AI \perp BC \Rightarrow \triangle ABC$ cân tại $A \Leftrightarrow AB = AC$.

Bài 10

$$\begin{aligned} M &= (ab + bc + ac) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - abc \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \\ &= (ab + bc + ac) \frac{ab + bc + ca}{abc} - abc \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2b^2c^2} = \frac{(ab + bc + ca)^2}{abc} - \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{abc} \\ &= \frac{2(ab^2c + a^2bc + abc^2)}{abc} = 2(a + b + c) = 2 \cdot 2013 = 4062 \end{aligned}$$

Bài 11

Vì $abc = 2013$, thay vào phân thức, ta được:

$$\begin{aligned} &\frac{2013a}{ab + 2013a + 2013} + \frac{b}{bc + b + 2013} + \frac{c}{ac + c + 1} = \frac{a^2bc}{ab + a^2bc + abc} + \frac{b}{bc + b + abc} + \frac{c}{ac + c + 1} \\ &= \frac{ac}{1 + ac + c} + \frac{1}{c + 1 + ac} + \frac{c}{ac + c + 1} \\ &= 1(\text{dpcm}) \end{aligned}$$