Đại số:

Bài 1:

1) Thay $x=\frac{1}{4}$ (TMĐK $x>0$ và $x\neq 4$) vào A, ta được $A=\frac{2+\sqrt{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\frac{1}{4}}}.= 5$

2) $B=\frac{x}{x-4}-\frac{1}{2-\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}+2}$

$\Leftrightarrow B=\frac{x+(\sqrt{x}+2)+(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$

$\Leftrightarrow B=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$

3) $P=\frac{x-4}{x}$.

$Px\leq\frac{3}{2}(\sqrt{x}-1)\Leftrightarrow 2x-3\sqrt{x}-5\leq 0 \Rightarrow 0<x\leq\frac{25}{4}$.

Kết hợp điều kiện thu được $x\in\{1;2;3;5;6\}$.

Bài 2:

1) Khi $x=9$ thì $A=\frac{\sqrt{9}+3}{\sqrt{9}-4}$ = - 6

2) $B=\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+4}+\frac{5\sqrt{x}+12}{x-16}=\frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-4)+5\sqrt{x}+12}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)}=\frac{x-\sqrt{x}-12+5\sqrt{x}+12}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)}$

$=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-4}$

3) $\frac{A}{B}=m+1\Leftrightarrow\sqrt{x}=\frac{3}{m}$

Phương trình $\frac{A}{B}=m+1$ có nghiệm $\Leftrightarrow\frac{3}{m}>0$ và $\frac{3}{m}\neq 4$

Vậy $m>0$ và $m\neq\frac{3}{4}$

Bài 3: Giải các hệ phương trình :

a) Đáp số (0,5; -2,5).
b) Đáp số (4; -2).
c) Đáp số (4; 3)

Bài 4: Giải các hệ phương trình bằng phương pháp đặt ẩn phụ:

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{4}{y+1} = -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{x-3} + \dfrac{1}{y+1} = \dfrac{7}{4} \end{cases} (I)$

ĐK: $x \neq 3,\ y \neq -1$.Đặt $\begin{cases} a = \dfrac{1}{x-3} \\ b = \dfrac{1}{y+1} \end{cases}$.

Khi đó hệ phương trình (I) có dạng: $\begin{cases} a - 4b = -\dfrac{1}{2} \\ 3a + b = \dfrac{7}{4} \end{cases} (II)$

Giải hệ phương trình (II) ta được $\begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{1}{4} \end{cases}$

Thay vào chỗ đặt giải tiếp ta được nghiệm (5; 3).

b) Đáp số: (3; 2).

c) Đáp số: (-1; 4).

d) Đáp số: (-2; -1).

Bài 5:

$m \neq 0$ *Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$\dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'} \Leftrightarrow \dfrac{m}{3} \neq \dfrac{-1}{m} \Leftrightarrow m^2 \neq -3$ ($luôn$ dúng$\forall m \neq 0$)

Vậy hệ luôn có nghiệm duy nhất với *m#0*

Từ phương trình (1) ta có:

$y = mx - 2$

Khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases} y = mx - 2 \\ 3x + m(mx-2) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = mx - 2 \\ (m^2+3)x = 2m+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2m+5}{m^2+3} \\ y = \dfrac{5m-6}{m^2+3} \end{cases}$$

Theo bài ra:

$$x + y = \frac{3}{m^2+3} \Leftrightarrow \frac{2m+5}{m^2+3} + \frac{5m-6}{m^2+3} = \frac{3}{m^2+3} \Leftrightarrow 7m = 4 \Leftrightarrow m = \frac{4}{7}(tm)$$

Bài 6: Từ (1) ta có:

$y = (m+1)x - (m+1)$

Khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases} y = (m+1)x - (m+1) \\ x + (m-1)[(m+1)x - (m+1)] = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (m+1)x - (m+1) \\ m^2x = m^2 + 1 \end{cases}$$

Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\leftrightarrow$ $m^2x=m^2+1$ có nghiệm duy nhất $\leftrightarrow$ m^2 *#0*$\leftrightarrow$

m#0

Với m khác 0 hệ phương trình có nghiệm duy nhất:

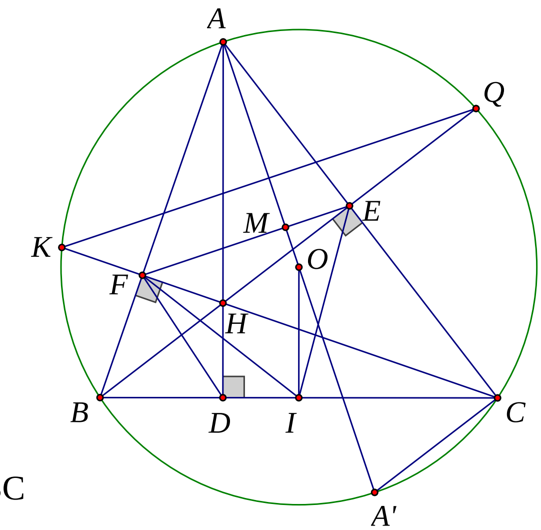
$$\begin{cases} x = \dfrac{m^2+1}{m^2} \\ y = \dfrac{m+1}{m^2} \end{cases}$$

Xét $x + y = \dfrac{m^2+m+2}{m^2} = \dfrac{2}{m^2} + \dfrac{1}{m} + 1 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{m} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \dfrac{7}{8} \geq \dfrac{7}{8}$ với $\forall m \neq 0$

Để $x + y$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{m} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow m = -4$(tm)

HÌNH HỌC:

Bài 7: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(\mathrm{O;R})$. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Các đường thẳng BE và CF lần lượt cắt đường tròn $(\mathrm{O;R})$ tại Q và K.



a) * ΔBCF: $BFC = 90^0$ (CF là đường cao)

$\Rightarrow$ ΔBCF nội tiếp đường tròn đường kính BC

$\Rightarrow$ B, C. F thuộc đường tròn đường kính BC (1)

* ΔBEC $BEC = 90^0$ (BE đường cao)

$\Rightarrow$ ΔBEC nội tiếp đường tròn đường kính BC

$\Rightarrow$ B, E, C thuộc đường tròn đường kính BC (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ B, C., E, F thuộc đường tròn đường kính BC

b) *Xét đường tròn đi qua bốn điểm B, C, E, F: $EBC = CFE$ (góc nội tiếp cùng chắn cung CE)

*Xét (O): $EBC = CKQ$ (góc nội tiếp cùng chắn QC

$\Rightarrow CFE = CKQ\left(= EBC\right)$

Mà hai góc này ở vị trí đồng vị

$\Rightarrow$ EF$//KQ$(d.h.n.b)

$BEF = BQK \Rightarrow EF \parallel QK$

c) Kẻ đường kính AA' cắt EF tại M

ΔABE đồng dạng ΔACF (g.g)

ΔAEF đồng dạng ΔABC (c.g.c)

$\Rightarrow ABC = AEF$ (hai góc tương ứng)

Xét (O): $AA'C = ABC$ (góc nội tiếp chắn cung AC)

$\Rightarrow AA'C = AEF$

$\Rightarrow \Delta AME$ đồng dạng với $\Delta ACA'$ (g.g)

$\Rightarrow ACA' = AME = 90^\circ \Rightarrow OA \perp FE$ tại M

Tương tự ta chứng minh được $OB \perp FD, OC \perp DE$

Do đó $S_{\mathrm{OAE}}+S_{OAF}=\frac{1}{2}OA.(ME+MF)=\frac{1}{2}R.EF$.

Tương tự ta có $S_{OFB}+S_{ODB}=\frac{1}{2}R\cdot FD$; $S_{ODC}+S_{OEC}=\frac{1}{2}R\cdot DE$.

Vậy $S_{ADC}=\frac{1}{2}R(DE+DF+FE)=\frac{1}{2}R$. Chu vi tam giác DEF . Vì R không đổi nên chu vi tam giác DEF lớn nhất khi S_{ABC} lớn nhất. Mà BC cố định nên S_{ABC} lớn nhất khi AD lớn nhất.

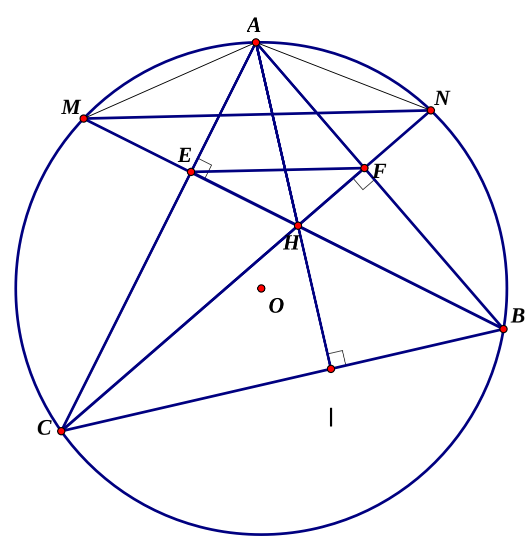
Ta có $\mathrm{AD}\le \mathrm{AI}, \mathrm{AI}\le \mathrm{AO}+\mathrm{OI} \Rightarrow \mathrm{AD}\le \mathrm{AO}+\mathrm{OI}$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow I, O, A$ thẳng hàng A là điểm chính giữa cung lớn BC .

Bài 8: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(\mathrm{O};\mathrm{R})$. Các đường cao BE,CF cắt nhau tại H, cắt đường tròn $(\mathrm{O};\mathrm{R})$ lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh AE.AC=AF.AB

ΔACF đồng dạng ΔABE (g.g)

$\Rightarrow \frac{AF}{AE}=\frac{AC}{AB}\Rightarrow$ AE.AC=AF.AB



b) Chứng minh MN song song với EF

c) Gọi I là giao điểm AH và BC

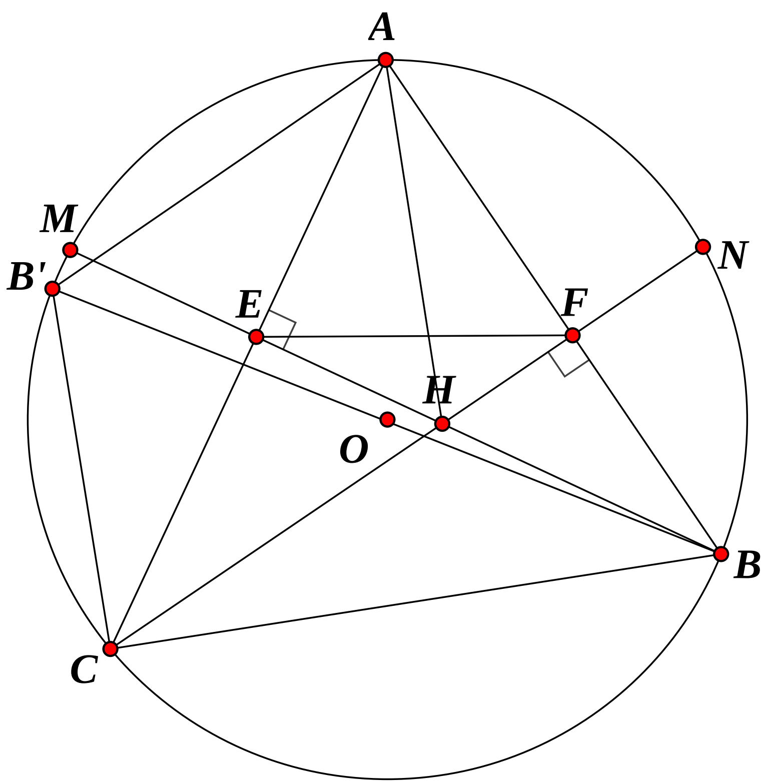
ΔECB đồng dạng ΔICA (g.g) $\Rightarrow EBC=IAC$

*Xét (O): $MAC=MBC$ (góc nội tiếp chắn cung MC)

$\Rightarrow MAC=IAC\left(=MBC\right)$

Tam giác AMH cân tại A (do AE vừa là phân giác vừa là đường cao)

$\Rightarrow \mathrm{MH}=2\mathrm{EH} \Rightarrow \mathrm{EH}=\frac{\mathrm{MH}}{2}<\mathrm{AH} \Rightarrow \frac{\mathrm{MH}}{\mathrm{AH}}<2$



d) Kẻ đường kính BB’

* A, E, H, F cùng thuộc đường tròn đường kính AH

$\Rightarrow$Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF có đường kính AH.

* Xét (O): $B'CB = 90^0; B'AB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn

* AH $\perp$BC; B’C $\perp$BC $\Rightarrow$B’C // AH

Chứng minh tương tự: B’A // CH

$\Rightarrow$ AHCB’ là hình bình hành => AH =CB’

* Tam giác CBB’ vuông tại C có BB’ = 2R, BC không đổi suy ra CB’ không đổi suy ra AH không đổi.

$\Rightarrow$Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF có đường kính không đổi khi A di động

Một số bài tập nâng cao

Bài 1: Đặt $t = \sqrt{x^2 + 1}$, với t > 0 ta có

$t^2 - (x+3)t + 3x = 0$

$\Leftrightarrow (t-x)(t-3) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = x \\ t = 3 \end{array}\right.$

TH1: $\sqrt{x^2+1}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2+1=x^2 \end{cases}$ (vô nghiệm)

TH2: $\sqrt{x^2+1}=3 \Leftrightarrow x^2=8 \Leftrightarrow x=\pm 2\sqrt{2}$.

Vậy pt có 2 nghiệm $x=\pm 2\sqrt{2}$

Bài 2:

Ta có: $P=\dfrac{2014\left(x+y\right)}{\sqrt{x\left(2x+3y\right)}+\sqrt{y\left(2y+3x\right)}}=\dfrac{2014.\sqrt{5}\left(x+y\right)}{\sqrt{5x\left(2x+3y\right)}+\sqrt{5y\left(2y+3x\right)}}$

Với x, y là các số thực dương. Áp dung bất đẳng thức Côsi chứng minh được

$\sqrt{5x\left(2x+3y\right)} \le \dfrac{7x+3y}{2}$ và $\sqrt{5y\left(2y+3x\right)} \le \dfrac{7y+3x}{2}$

$\Rightarrow \sqrt{5x\left(2x+3y\right)}+\sqrt{5y\left(2y+3x\right)} \le 5\left(x+y\right)$. Do đó $P \ge \dfrac{2014}{\sqrt{5}}=\dfrac{2014\sqrt{5}}{5}$.

Từ đó tìm được GTNN của P bằng $\dfrac{2014\sqrt{5}}{5}$ khi x = y

$m \ne 0$ Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$\dfrac{a}{a'} \ne \dfrac{b}{b'} \Leftrightarrow \dfrac{m}{3} \ne \dfrac{-1}{m} \Leftrightarrow m^2 \ne -3$ ($luôn$ đúng$\forall m \ne 0$)