



**ĐẠI SỐ**

**Bài 1.** Cho biểu thức:  $A = \left( \frac{2+x}{2-x} - \frac{4x^2}{x^2-4} - \frac{2-x}{2+x} \right) : \frac{x^2-3x}{2x^2-x^3}$  (ĐKXĐ:  $x \neq 0; x \neq 2; x \neq -2$ )

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{(2+x)^2 + 4x^2 - (2-x)^2}{(2-x) \cdot (2+x)} : \frac{x(x-3)}{x^2(2-x)} \\ &= \frac{8x + 4x^2}{(2-x) \cdot (2+x)} : \frac{(x-3)}{x(2-x)} = \frac{4x^2}{(x-3)} \end{aligned}$$

b) Với  $x \neq 0; x \neq 2; x \neq -2$

Ta có  $4 : 4 \Rightarrow \frac{4x^2}{(x-3)} : 4$  thì  $\frac{x^2}{x-3} \in Z$

$$\frac{x^2}{x-3} = x + 3 + \frac{9}{x-3} \in Z$$

$$\Rightarrow 9 : (x-3)$$

$$\Leftrightarrow (x-3) \in U(9) = \{\pm 1; \pm 3; \pm 9\} \Rightarrow x \in \{-6; 12; 6; 4\}$$

**Bài 2.**

a)  $P = \left( \frac{2x}{2x^2-5x+3} - \frac{5}{2x-3} \right) : \left( 3 + \frac{2}{1-x} \right)$  (ĐK:  $x \neq 1; x \neq \frac{3}{2}$ )

$$\begin{aligned} P &= \frac{2x-5(x-1)}{(2x-3) \cdot (x-1)} : \frac{3 \cdot (1-x) + 2}{1-x} \\ &= \frac{-1}{2x-3} \end{aligned}$$

b) Ta có  $|3x-2|+1=5 \Leftrightarrow |3x-2|=4$

TH1:  $3x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow 3x-2=4$$

$$\Leftrightarrow x=2(\text{TM})$$

TH2:  $3x-2 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{2}{3}$

$$3x-2=-4$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2}{3}(\text{TM})$$

Thay  $x=2$  vào biểu thức  $P = \frac{-1}{2x-3}$  ta được  $P = -1$

Thay  $x = \frac{-2}{3}$  vào biểu thức  $P = \frac{-1}{2x-3}$  ta được  $P = \frac{3}{13}$

KL:

c)

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{6-x^2} \\ \Leftrightarrow \frac{-1}{2x-3} &= \frac{1}{6-x^2} \\ \Leftrightarrow x &\in \{-1; 3\} \end{aligned}$$

**Bài 3.** ĐKXĐ:  $x \neq -3; x \neq 2$

$$A = \frac{x+2}{x+3} - \frac{5}{x^2+x-6} + \frac{1}{2-x}$$

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad &= \frac{(x+2)(x-2)-5-(x+3)}{(x+3)(x-2)} \\ &= \frac{x^2-x-12}{(x+3)(x-2)} = \frac{x-4}{x-2} \end{aligned}$$

b) Với  $x \neq -3; x \neq 2$

$$A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x-4}{x-2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 6(TM)$$

Vậy  $x = 6$  thì  $A = \frac{1}{2}$

c)

$$x^2 - x = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2(KTM) \\ x = -1(TM) \end{cases}$$

Thay  $x = -1$  vào biểu thức A ta được  $A = \frac{5}{3}$

KL:

**Bài 4.** ĐKXD:  $x \neq \pm 2$

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad A &= \left( \frac{1}{x+2} - \frac{2x}{4-x^2} + \frac{3}{x-2} \right) : \frac{3x+2}{x+2} \\ &= \frac{x-2+2x+3(x+2)}{(x+2)(x-2)} : \frac{3x+2}{x+2} \\ &= \frac{2}{x-2} \end{aligned}$$

b) Thay  $x = -5$  (TM) vào biểu thức A ta được  $A = \frac{-2}{7}$

c) Để  $A \in \mathbb{Z}$  thì  $2:(x-2)$  hay  $(x-2) \in U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$

$$\Leftrightarrow x \in \{0; 4; 1; 3\}$$

$\Leftrightarrow$  KL:

**Bài 5.**

- Gọi số lít dầu lúc đầu thùng B chứa là  $x$  (lít) ( $x \in \mathbb{N}^*$ )

- Số lít dầu lúc đầu thùng A chứa là  $3x$  (lít)

- Nếu lấy bớt ở thùng A 14 lít và đổ thêm vào thùng B 22 lít thì số lít dầu ở thùng A gấp đôi số lít dầu ở

thùng dầu B nên ta có phương trình:  $3x - 14 = 2(x + 22)$

$$\Leftrightarrow x = 58$$

Vậy số lít dầu ở thùng B lúc đầu là 58 lít, số lít dầu lúc đầu ở thùng A là 174 lít

**Bài 6.**

- Gọi vận tốc xe đạp là  $x$  (km/h)

- Vận tốc xe máy là  $2,5x$  (km/h)

- Thời gian xe đạp đi từ A đến B là  $\frac{50}{x}$  (giờ)

- Thời gian xe máy đi từ A đến B là  $\frac{50}{2,5x}$  (giờ)

Sau đó 1h30' một xe máy cũng từ A và đến B trước xe đạp một giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{50}{2,5x} = \frac{50}{x} - 1 - \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 12$$

Vậy vận tốc xe đạp là 12 (km/h)

Vận tốc xe máy là 30 (km/h)

**Bài 7.**

Gọi quãng đường AB là  $x$  km.

Thời gian xe máy đi  $\frac{2}{3}$  quãng đường đầu là  $\frac{\frac{2}{3}x}{50} = \frac{x}{75}$  (h)

Thời gian xe máy đi  $\frac{1}{3}$  quãng đường còn lại là  $\frac{\frac{1}{3}x}{40} = \frac{x}{120}$  (h)

. Sau khi đi được  $\frac{2}{3}$  quãng đường với vận tốc 50km/h thì người đó nghỉ 60' rồi đi tiếp quãng đường còn lại với vận tốc 40km/h và đến B lúc 14h cùng ngày nên ta có phương trình:

$$\frac{x}{75} + 1 + \frac{x}{120} = 8$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4200}{13}$$

Vậy quãng đường AB dài  $\frac{4200}{13} \approx 323km$

**Bài 8.**

a)

$$(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) = 12 \quad (1)$$

Đặt  $x^2 + x = t$ . Khi đó phương trình (1) trở thành  $t^2 + 4t = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \Rightarrow x = 1; x = -2 \\ t = -6 \Rightarrow x \in \emptyset \end{cases}$

Tập nghiệm của phương trình  $S = \{1; -2\}$

b)

$$(x-7)(x-5)(x-4)(x-2) - 72 = 0$$

$$\Leftrightarrow [(x-7)(x-2)] \cdot [(x-5)(x-4)] - 72 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 9x + 14) \cdot (x^2 - 9x + 20) - 72 = 0 \quad (2)$$

Đặt  $x^2 - 9x + 14 = t$ . Khi đó phương trình (2) trở thành

$$t \cdot (t+6) - 72 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 6 \Rightarrow x = 8; x = 1 \\ t = -12 \Rightarrow x \in \emptyset \end{cases}$$

Tập nghiệm của phương trình  $S = \{1; 8\}$

c)

$$(x^2 + 1)^2 + 3x(x^2 + 1) + 2x^2 = 0$$

$$t^2 + 3xt + 2x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 + xt + 2xt + 2x^2 = 0$$

Đặt  $x^2 + 1 = t$  phương trình trở thành  $\Leftrightarrow (t+x) \cdot (t+2x) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -x \\ t = -2x \end{cases}$$

Th1:  $t = -x$

$$\Rightarrow x^2 + 1 = -x \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x \in \emptyset$$

Th2:  $t = -2x$

$$\Rightarrow x^2 + 1 = -2x \Leftrightarrow x = -1$$

Vậy tập nghiệm của phương trình  $S = \{-1\}$

d)

$$\begin{aligned} \frac{x+25}{75} + \frac{x+30}{70} &= \frac{x+35}{65} + \frac{x+40}{60} \\ \Leftrightarrow \frac{x+25}{75} + 1 + \frac{x+30}{70} + 1 &= \frac{x+35}{65} + 1 + \frac{x+40}{60} + 1 \\ \Leftrightarrow \frac{x+100}{75} + \frac{x+100}{70} &= \frac{x+100}{65} + \frac{x+100}{60} \\ \Leftrightarrow (x+100) \cdot \left( \frac{1}{75} + \frac{1}{70} + \frac{1}{65} + \frac{1}{60} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x+100 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -100 \end{aligned}$$

Tập nghiệm của phương trình  $S = \{-100\}$

### Bài 9

$$m^2x - 2 = m^2 + 3m + 4x \quad (1)$$

a) Thay  $x = 2$  vào phương trình (1) ta được

$$m^2 \cdot 2 - 2 = m^2 + 3m + 4 \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m = -2 \end{cases}$$

Vậy  $m \in \{-2; 5\}$  thì phương trình có nghiệm  $x = 2$

b)

$$m^2x - 2 = m^2 + 3m + 4x$$

$$\Leftrightarrow (m^2 - 4) \cdot x - 2 - m^2 - 3m = 0 \quad (2)$$

Để phương trình có nghiệm duy nhất thì  $m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$

Vậy  $m \neq \pm 2$  thì phương trình có nghiệm

c) Để phương trình vô nghiệm thì

$$\begin{cases} m^2 - 4 = 0 \\ -2 - m^2 - 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 2 \\ m \neq -1 \Leftrightarrow m = 2 \\ m \neq -2 \end{cases}$$

Vậy  $m = 2$  thì phương trình vô nghiệm

### Bài 10.

a)  $A = (a+b) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ ; với  $a, b$  cùng dấu.

$$A = (a+b) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

Do  $a, b$  cùng dấu nên  $\frac{a}{b} > 0; \frac{b}{a} > 0$ . Áp dụng bất đẳng thức cô si cho 2 số  $\frac{a}{b}; \frac{b}{a}$  không âm, ta được:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2 \Rightarrow A \geq 4$$

Vậy GTNN của  $A = 4 \Leftrightarrow a = b$

$$b) B = \frac{2x^2 + 6x + 10}{x^2 + 3x + 3} = 2 + \frac{1}{x^2 + 3x + 3}$$

$$\text{Có } x^2 + 3x + 3 = \left( x + \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \Rightarrow B \leq 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$$

Vậy GTLN của  $B = \frac{11}{4}$ , dấu "=" xảy ra  $\Leftrightarrow x = \frac{-3}{2}$

$$c) C = \frac{2x^2 + 5x + 8}{x}, \text{ với } x > 0$$

$$C = \frac{2x^2 + 5x + 8}{x} = x + \frac{8}{x} + 5$$

Do  $x > 0$ , áp dụng bất Cô si, ta được:  $x + \frac{8}{x} \geq 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2} \Rightarrow C \geq 4\sqrt{2} + 5$

Vậy GTNN của  $C = 4\sqrt{2} + 5 \Leftrightarrow x = \frac{8}{x} \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$

d)  $D = x^2 + 4y^2$  và  $x + 4y = 1$ .

Có  $x + 4y = 1 \Leftrightarrow x = 1 - 4y \Rightarrow D = 20y^2 - 8y + 1 = \left(2\sqrt{5}y + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{1}{5} \geq \frac{1}{5}$

Vậy GTNN của  $D = \frac{1}{5} \Leftrightarrow y = \frac{1}{5} \Rightarrow x = \frac{1}{5}$

### Bài 11.

Gọi  $\{I\} = AC \cap MN$

a)  $\frac{MA}{AD} = \frac{NB}{BC}$

$\uparrow$

$$\frac{MA}{AD} = \frac{AI}{AC}; \frac{NB}{BC} = \frac{AI}{AC}$$

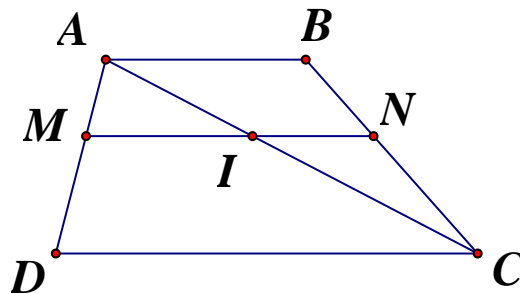
$\uparrow$

$\uparrow$

$MI \parallel DC \quad IN \parallel AB$

$\uparrow$

$MN \parallel AB; AB \parallel CD$



b)  $\frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC}$

$\uparrow$

$$\frac{MA}{MD} = \frac{AI}{IC}; \frac{NB}{NC} = \frac{AI}{IC}$$

$\uparrow$

$\uparrow$

$MI \parallel DC \quad IN \parallel AB$

c)  $\frac{MD}{AD} = \frac{NC}{BC}$

$\uparrow$

$$\frac{MD}{AD} = \frac{CI}{AC}; \frac{NC}{BC} = \frac{CI}{AC}$$

$\uparrow$

$\uparrow$

$MI \parallel DC \quad IN \parallel AB$

### Bài 12

$$\frac{AE}{AB} + \frac{AF}{AC} = 1$$

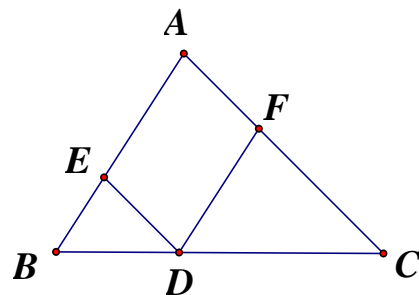
$\uparrow$

$$\frac{AE}{AB} = \frac{DC}{BC}; \frac{AF}{AC} = \frac{BD}{BC}; \frac{DC}{BC} + \frac{BD}{BC} = 1$$

$\uparrow$

$\uparrow$

$ED \parallel AC \quad FD \parallel AB$



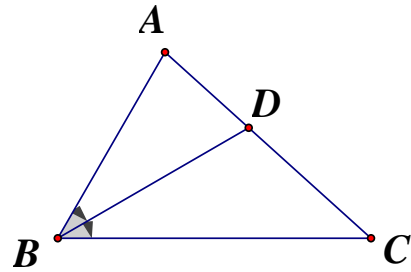
### Bài 13

Có BD là phân giác của  $\triangle ABC$

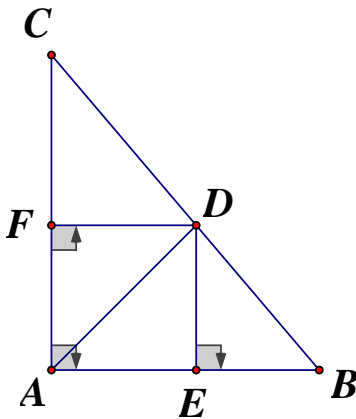
$$\Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{DC - AD} = \frac{2}{7 - 2} \Rightarrow AD = \frac{2}{5} \Rightarrow DC = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$$

$$\Rightarrow AC = \frac{2}{5} + \frac{7}{5} = \frac{9}{5}$$



#### Bài 14



a) Áp dụng định lý Pitago trong  $\triangle ABC$  vuông tại A, ta tính được  $BC = 29\text{cm}$ .

b) Do AD là phân giác của góc A  $\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{DC}{DB} \Rightarrow \frac{20}{21} = \frac{DC}{DB} \Rightarrow \frac{DC}{CB} = \frac{21}{41}$  (áp dụng tính chất tỉ lệ thức)

$$\Rightarrow DC = \frac{21 \cdot 29}{41} \approx 15\text{cm} \Rightarrow DB = 14\text{cm}$$

c) Tứ giác AEDF là hình vuông

↑↑

AEDF là hình chữ nhật, AD là tia phân giác  $\angle A$

↑

↑

$$\angle A = \angle DEA = \angle DFA = 90^\circ \quad \text{GT}$$

+)  $\frac{CF}{CA} = \frac{CD}{CB}$  (vì  $DF \parallel AB$ , đl Talet)

$$\Rightarrow CF = \frac{CA \cdot CD}{CB} = \frac{21 \cdot 15}{29} \approx 11\text{cm}$$

Có  $FD^2 = CD^2 - CF^2 = 104$  (ĐL Pytago trong  $\triangle CDF$ ;  $\angle F = 90^\circ$ )

$$\Rightarrow S_{AEDF} = FD^2 = 104$$