

MÔN TOÁN

A. ĐẠI SỐ

I. Rút gọn biểu thức

Bài 1. Cho $M = \frac{x+12}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x+2}} - \frac{4}{\sqrt{x-2}}$, với $x \geq 0, x \neq 4$.

- a) Rút gọn biểu thức M;
- b) Tìm x để $M = \frac{1}{4}$;
- c) Chứng minh $M < 1$;
- d) Tìm giá trị nhỏ nhất của M.

Bài 2. a) Cho $A = \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$. Tìm giá trị của A tại $x = 16$.

b) Rút gọn $B = \frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}}$.

c) Tìm x nguyên để biểu thức $C = A : B - 1$ có giá trị nguyên.

Bài 3. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}-x} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2}{1-x} \right)$

- a) Rút gọn P;
- b) Tính giá trị của P biết $x = 7 - 4\sqrt{3}$;
- c) Tìm x để $P < 0$;

Bài 4. Cho hai biểu thức $P = \frac{x+3}{\sqrt{x}-2}$ và $Q = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}-2}{x-4}$ với $x > 0, x \neq 4$

- a) Tính giá trị của biểu thức P khi $x = 9$.
- b) Rút gọn biểu thức Q.
- c) Tìm giá trị của x để biểu thức $\frac{P}{Q}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 5. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{4\sqrt{x}}{3}$ ($x \geq 0$)

- a) Rút gọn P;
- b) Tìm x để $P = \frac{8}{9}$;
- c) Tìm giá trị lớn nhất của P.

II. Hệ phương trình

Bài 6. Giải các hệ phương trình:

a)
$$\begin{cases} (x+1)(y-1) = xy - 1 \\ (x-3)(y-3) = xy - 3 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \frac{3}{\sqrt{x}+1} + \frac{5}{\sqrt{y}-2} = 6 \\ \frac{12}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{y}-2} = 3 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 4x - |y+2| = 3 \\ x + 2|y+2| = 3 \end{cases}$$

II. Hàm số - phương trình bậc hai – hệ thức Vi-et:

Bài 7. Cho phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + m - 1 = 0$ (m là tham số)

- a) Giải phương trình khi $m = 1$;
- b) CMR phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi giá trị của m;
- c) Tìm m để phương trình có một nghiệm $x = -3$. Tìm nghiệm còn lại;
- d) Tìm m để 2 nghiệm x_1, x_2 của phương trình thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 = 12$;
- e) Tìm m để 2 nghiệm x_1, x_2 của phương trình thỏa mãn: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -2$;
- g) CMR biểu thức $A = x_1(1-x_2) + x_2(1-x_1)$ không phụ thuộc vào m.

Bài 8.

- a) Xác định số k để phương trình: $x^2 + 2x + k = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện: $3x_1 + 2x_2 = 1$.
- b) Cho phương trình: $x^2 - mx - m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 mà: $|x_2 - x_1| = 2$.
- c) Cho phương trình: $x^2 - mx + m - 6 = 0$. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 mà: $|x_1| + |x_2| = 6$.
- d) Cho phương trình: $x^2 - 2(k + 3)x + 2k - 1 = 0$. Tìm k để tổng bình phương các nghiệm có giá trị nhỏ nhất.

Bài 9. a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng (d): $y = -\frac{1}{2}x + 2$ trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

Bài 10. Cho (P): $y = x^2$ và (d): $y = mx - m + 1$

a) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) khi $m = 3$.

b) Tìm m để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt có tọa độ $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$ thỏa mãn: $y_1 + y_2 = 2$.

Bài 11. Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = -mx + m + 1$. Tìm m sao cho đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt:

a) Ở hai phía của trục tung; b) Ở bên phải trục tung; c) Ở bên trái trục tung.

Bài 12. Cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx + 1$.

a) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B.

b) Tìm giá trị của m để diện tích tam giác OAB bằng 3.

III. Các bài toán giải bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình

Bài 13. Một tàu thủy chạy trên khúc sông dài 80km cả đi lẫn về mất 8 giờ 20 phút. Tính vận tốc của tàu khi nước yên lặng, biết rằng vận tốc dòng nước là 4km/h.

Bài 14. Hai ô tô khởi hành cùng một lúc từ A đến B. Ô tô thứ nhất chạy nhanh hơn ô tô thứ hai 10km/h nên đã đến sớm hơn ô tô thứ hai 30 phút. Tính vận tốc của mỗi ô tô, biết rằng đoạn đường từ A đến B dài 100km.

Bài 15. Theo kế hoạch 2 tổ sản xuất 600 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do áp dụng kỹ thuật mới nên tổ I đã vượt mức 18% và tổ II vượt mức 21%. Vì vậy trong thời gian quy định họ đã hoàn thành vượt mức 120 sản phẩm. Hỏi số sản phẩm được giao của mỗi tổ theo kế hoạch.

Bài 16. Một nhóm thợ đặt kế hoạch sản xuất 3000 sản phẩm. Trong 8 ngày đầu họ thực hiện đúng mức đề ra, những ngày còn lại họ đã làm vượt mức mỗi ngày 10 sản phẩm, nên đã hoàn thành kế hoạch sớm 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

Bài 17. Một đội xe dự định dùng một số xe cùng loại để chở 120 tấn hàng gửi tặng đồng bào nghèo ở vùng cao biên giới. Lúc sắp khởi hành đội được bổ sung thêm 5 xe cùng loại nữa. Nhờ vậy, so với ban đầu, mỗi xe phải chở ít hơn 2 tấn. Hỏi lúc đầu đội có bao nhiêu xe biết khối lượng hàng mỗi xe phải chở là như nhau.

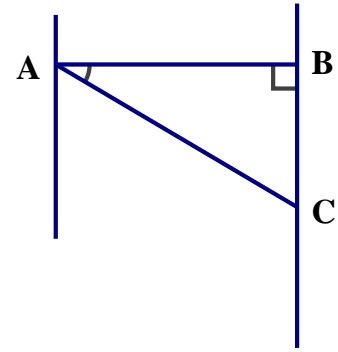
Bài 18. Hai người thợ cùng làm một công việc trong 7 giờ 12 phút thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 5 giờ, người thứ 2 làm trong 6 giờ thì cả hai người làm được 75% công việc. Hỏi mỗi người làm một mình công việc đó thì mấy giờ xong.

Bài 19. Hai đội công nhân cùng làm một công việc thì làm xong trong 4 giờ. Nếu mỗi đội làm một mình thì để hoàn thành công việc ấy đội 1 cần ít thời gian hơn đội 2 là 6 giờ. Hỏi nếu mỗi đội làm một mình thì sau bao lâu xong công việc.

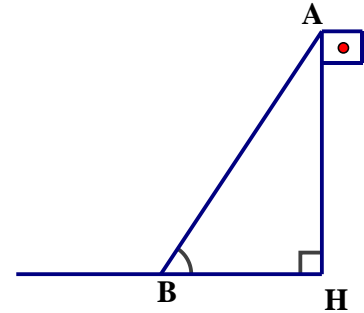
Bài 20. Một phòng họp có 240 ghế ngồi nhưng phải xếp cho 306 người đến dự họp. Do đó ban tổ chức đã kê thêm 1 hàng ghế và mỗi hàng ghế phải xếp nhiều hơn quy định 3 ghế mới đủ chỗ ngồi. Hỏi lúc đầu phòng họp có bao nhiêu hàng ghế và mỗi hàng ghế có bao nhiêu ghế biết số hàng ghế ban đầu không nhỏ hơn 10.

B. HÌNH HỌC

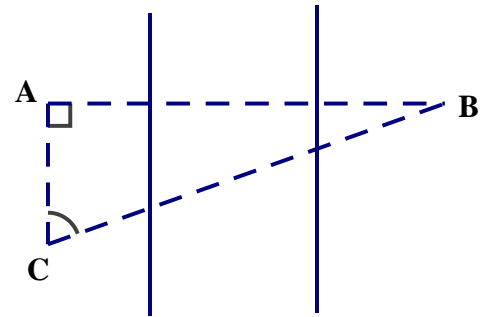
Bài 21. Chiều rộng của con sông là 200m. Một con đò xuất phát từ A đi sang bờ bên kia bị dòng nước đẩy nên đã đi theo đường AC. Biết $\angle BAC = 30^\circ$. Tính quãng đường AC mà đò đã đi.



Bài 22. Tính chiều cao cột cờ ở sân trường (đoạn AH), biết tia nắng AB tạo với bóng cột cờ HB góc 60° và đoạn BH dài 5m.



Bài 23. Để đo khoảng cách giữa hai địa điểm A và B ở hai bờ một con sông, người ta đặt máy đo ở vị trí C sao cho $AC \perp AB$. Biết $AC = 20\text{m}$ và $\angle ACB = 75^\circ$. Tính khoảng cách AB



Bài 24. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi AD là phân giác trong góc A của tam giác AHC.

- Chứng minh tam giác BAD là tam giác cân;
- Cho $BC = 25\text{cm}$; $HD = 6\text{cm}$. Tính AB.

Bài 25. Cho đường tròn (O) bán kính R, đường thẳng d không qua O và cắt đường tròn tại hai điểm A, B. Từ một điểm C trên d (C nằm ngoài đường tròn), kẻ hai tiếp tuyến CM, CN với đường tròn (M, N thuộc đường tròn (O)). Gọi H là trung điểm của AB, đường thẳng OH cắt tia CN tại K.

- Chứng minh bốn điểm C, O, H, N cùng nằm trên một đường tròn.
- Chứng minh $KN \cdot KC = KH \cdot KO$.
- Đoạn thẳng CO cắt đường tròn (O) tại I, chứng minh I cách đều CM, CN và MN.
- Một đường thẳng đi qua O và song song với MN cắt các tia CM, CN lần lượt tại E và F. Xác định vị trí của C trên d sao cho diện tích tam giác CEF là nhỏ nhất.

Bài 26. Cho đường tròn (O; R) và điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm).

- Chứng minh ABOC là tứ giác nội tiếp.
- Gọi E là giao điểm của BC và OA. Chứng minh BE vuông góc với OA và $OE \cdot OA = R^2$.
- Trên cung nhỏ BC của đường tròn (O; R) lấy điểm K bất kì (K khác B và C). Tiếp tuyến tại K của đường tròn (O; R) cắt AB, AC theo thứ tự tại các điểm P, Q. Chứng minh tam giác APQ có chu vi không đổi khi K chuyển động trên cung nhỏ BC.
- Đường thẳng qua O vuông góc với OA cắt các đường thẳng AB, AC theo thứ tự tại các điểm M, N. Chứng minh $PM + QN \geq MN$.

Bài 27. Cho ba điểm A, B, C trên một đường thẳng theo thứ tự ấy ($AB > AC$). Vẽ đường tròn (O) đường kính AB và đường tròn (O') đường kính BC. NM là dây cung của đường tròn (O) vuông góc với AC tại trung điểm I của AC. Gọi giao điểm thứ hai của MB với (O') là K.

- Tứ giác AMCN là hình gì? Vì sao?
- Chứng minh tứ giác IMCK nội tiếp.
- Chứng minh C, K, N thẳng hàng.
- Chứng minh IK là tiếp tuyến của đường tròn (O').

Bài 28. Cho đường tròn (O) trên đó lấy điểm A cố định. Kẻ tia Ax tiếp xúc với (O) tại A. Lấy điểm M trên tia Ax, kẻ tiếp tuyến MB với (O). Gọi I là trung điểm của MA và K là giao điểm thứ hai của BI với (O). Tia MK cắt (O) tại điểm thứ hai là C.

- Chứng minh tam giác MIK đồng dạng với tam giác BIM.
- Chứng minh BC song song với MA.
- Có vị trí nào của M để tứ giác AMBC là hình bình hành không? Vì sao?
- Gọi H là trực tâm của tam giác MAB. Chứng minh rằng khi M di động trên tia Ax thì H chạy trên một đường tròn cố định.

Bài 29. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O; R), I là điểm đối xứng với A qua O. Trên cạnh AB lấy điểm M, trên tia đối của tia CA lấy điểm N sao cho $BM = CN = a$.

- Chứng minh $IB = IC$ và $IM = IN$.
- Gọi E là giao điểm của AI và MN. Chứng minh tích $EA \cdot EI = EM \cdot EN$.
- Gọi K là giao điểm của đoạn BC và MN. Chứng minh K là trung điểm của MN.
- Tìm tập hợp tâm đường tròn (J) ngoại tiếp tứ giác AMIN khi điểm M di động trên đoạn AB.

Bài 30. Cho đường tròn (O; R) có hai đường kính AB và CD vuông góc. Gọi I là trung điểm OB. Nối CI cắt đường tròn (O; R) tại E. Nối AE cắt CD tại H, nối BD cắt AE tại K.

- Chứng minh BOHE là tứ giác nội tiếp.
- Chứng minh $AH \cdot AE = 2R^2$.
- Tính $\tan \widehat{BAE}$.
- Chứng minh $OK \perp BD$.

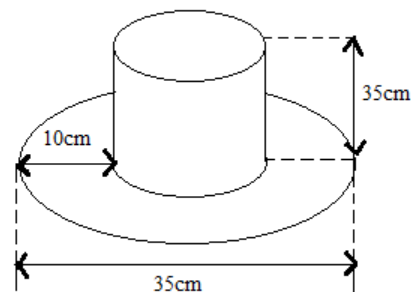
Bài 31. Cho tam giác vuông cân ABC (góc C vuông), E là một điểm tùy ý trên cạnh BC. Qua B kẻ một tia vuông góc với tia AE tại H và cắt tia AC tại K. Chứng minh rằng:

- Tứ giác BHCA nội tiếp.
- $KC \cdot KA = KH \cdot KB$.
- Độ lớn của góc CHK không phụ thuộc vị trí điểm E.
- Khi E di chuyển trên cạnh BC thì $BE \cdot BC + AE \cdot AH$ không đổi.

Bài 32.

1) Một hộp sữa hình trụ có thể tích là 16π (cm³). Biết rằng đường kính đáy và độ dài trục của hình trụ bằng nhau. Tính diện tích vật liệu cần dùng để tạo nên một hộp sữa như vậy (bỏ qua diện tích phần ghép nối)

2) Tham gia phong trào “*Thiếu niên sáng tạo*”, bạn **Trí Bình** đã thiết kế được một chiếc mũ vải rộng vành có kích thước như hình vẽ. Hãy tính tổng diện tích vải cần để làm cái mũ đó biết rằng vành mũ hình tròn và ống mũ hình trụ (coi phần mép vải được may không đáng kể. Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Một số bài tập nâng cao:

1) Cho x, y, z là các số dương thay đổi thỏa mãn: $x + y + z = 3$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T = x^5 + y^5 + z^5 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} + 2\sqrt{x}$

3) Giải phương trình

$$\sqrt{x^2 - \frac{1}{4}} + \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}(2x^3 + x^2 + 2x + 1)$$

4) Với a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c + ab + bc + ca = 6abc$, chứng minh: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq 3$

5) Một viên gạch hình vuông cạnh $a(\text{cm})$ có hoa văn như hình vẽ. M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, AB, BC, CD . Tìm độ dài a biết diện tích phần gạch chéo là $200(4 - \pi)(\text{cm}^2)$

