ĐỀ 1

Bài 1: Cho hai biểu thức $A=\frac{\sqrt{x}+2}{x-\sqrt{x}}$ và $B=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{x-1}$ với x > 0, x≠ 1.

1. Khi x = 16 thì A = $\frac{\sqrt{16}+2}{16-\sqrt{16}}=\frac{1}{2}$

2. Rút gọn biểu thức $B=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{x-1}$

$$=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)+\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

3. Tìm giá trị nhỏ nhất của x để biểu thức M = B : A đạt giá trị nhỏ nhất.

M = B : A

$$=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}:\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}.\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}+2}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x}+1}$$

$$=\sqrt{x}-1+\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

$$=\sqrt{x}+1+\frac{1}{\sqrt{x}+1}-2$$

Áp dụng BĐT Cô si cho hai biểu thức dương:

$$\left(\sqrt{x}+1\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)\geq 2.\sqrt{\left(\sqrt{x}+1\right).\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}+1+\frac{1}{\sqrt{x}+1}-2\geq 2-2$$

$$\Leftrightarrow M\geq 0$$

GTNN của M = 0 khi $\sqrt{x}+1=\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow x=0$

Bài 2: Giải các hệ phương trình:

a) Đáp số $(1;3)$.

b) ĐK: $x \geq -3$

Đặt $\begin{cases} a = x+y \\ b=\sqrt{x+3} \end{cases}$, $b \geq 0$. Khi đó hệ có dạng: $\begin{cases} a+b=2 \\ 2a-3b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1(tm) \end{cases}$

Thay vào chỗ đặt ta có: $\begin{cases} x+y=1 \\ \sqrt{x+3}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2(tm) \\ y=3 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(-2;3)$.

Bài 3: Gọi vận tốc của ô tô là x (km/h, x > 0)

Vận tốc của tàu hỏa là y (km/h; y > 0)

Vì vận tốc của tàu hỏa hơn vận tốc của ô tô là 5km/h nên ta có phương trình: y – x = 5 (1)

Quãng đường người đó đi ô tô trong 4 giờ là: 4.x (km)

Quãng đường người đó đi tàu hoả trong 7 giờ là 7y (km)

Vì người đó đi đoạn đường dài 640km gồm cả ô tô và tàu hỏa nên ta có phương trình:

4x + 7y = 640 (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

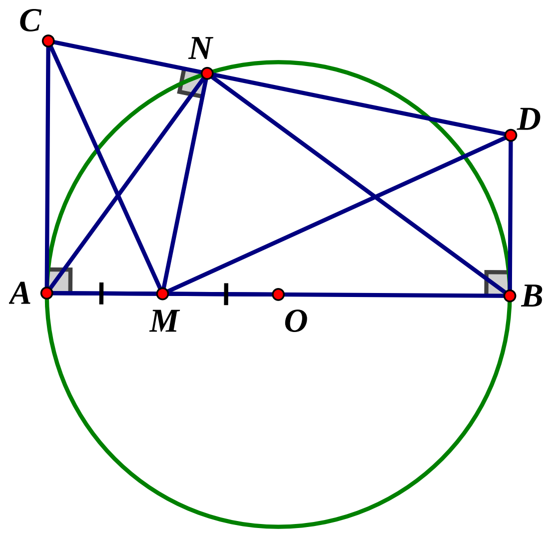
$$\begin{cases} y-x=5 \\ 4x+7y=640 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình: tìm được $\begin{cases} x=55 \\ y=60 \end{cases}$ (t/m)

Vậy vận tốc của ô tô là 55km/h

Vận tốc của tàu hỏa là 60 km/h

Bài 4: Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính AB. Gọi M là trung điểm của OA. Lấy điểm N bất kì thuộc (O) (N không trùng với A và B). Vẽ tiếp tuyến Ax, By với đường tròn. Đường thẳng đi qua N và vuông góc với MN cắt Ax và By lần lượt tại C và D.



a) **Chứng minh: C, A, M, N cùng thuộc một đường tròn đường kính CM**

b) Chứng minh: $\widehat{CMN} = \widehat{NBA}$

Chứng minh: $\widehat{CMN} = \widehat{NBA}$

$\widehat{CMN} = \widehat{CAN}$ (góc nt chắn cung CN)

$\widehat{NBA} = \widehat{CAN}$ (góc giữa tiếp tuyến và dây; góc nội tiếp chắn cung CN)

$\rightarrow \widehat{CMN} = \widehat{NBA}$

c) Chứng minh: ΔCMD vuông tại M và $AC.BD$ có giá trị không phụ thuộc và vị trí của điểm M

*)Chứng minh : ΔCMD vuông tại M

Tứ giác MNBD nội tiếp

$\rightarrow \widehat{NDM} = \widehat{NBM}$ (góc nt chắn cung MN)

$\widehat{NCM} = \widehat{NAM}$ (góc nt chắn cung MN)

$\widehat{NBM} + \widehat{NAM} = 90^0$ (ΔABC vuông tại A)

$\rightarrow \widehat{NDM} + \widehat{NCM} = 90^0$

$\rightarrow \widehat{CMD} = 90^0$

$\rightarrow\Delta$CMD vuông tại M

Chứng minh: $AC.BD$ **có giá trị không phụ thuộc và vị trí của điểm M**

*) $\widehat{AMC} + \widehat{CMD} + \widehat{DMB} = 180^0$

$\widehat{CMD} = 90^0$

$\rightarrow \widehat{AMC} + \widehat{DMB} = 90^0$

$\widehat{AMC} + \widehat{CAM} = 90^0$((ΔACM vuông tại A)

$\rightarrow \widehat{DMB} = \widehat{AMC}$

*) ΔACM đồng dạng ΔBMD (g.g)

$\rightarrow \frac{AC}{BM} = \frac{AM}{BD} \rightarrow AC.BD = BM.AM = \frac{3}{4}R^2$

d) Xác định vị trí điểm N trên (O) sao cho diện tích tam giác CMD đạt giá trị nhỏ nhất.

$S_{CMD} = \frac{1}{2}CM.MD$

$CM^2.MD^2 = (CA^2 + AM^2).(DB^2 + BM^2) \geq 2AC.AM.2BD.BM = \frac{9}{4}R^2$

$\rightarrow \min S_{CMD} = \frac{9}{4}R^2$ khi $AC = AM; BD = BM$

$\rightarrow MC = \frac{R\sqrt{2}}{2}; MD = \frac{3R\sqrt{2}}{2} \rightarrow MN = \frac{3R\sqrt{5}}{10}$

→ N là giao điểm (O) và (M, MN)

Bài 5: Cho x, y là những số thực thỏa mãn: $x + y + xy = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 + y^2$.

Ta có:

$(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2x$ (1)

$(x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy$ (2)

$(y-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 + 1 \geq 2y$ (3)

Cộng từng vế của (1), (2) và (3) ta được: $2(x^2 + y^2) + 2 \geq 2(x + y + xy) \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2$

Vậy $A_{\min} = 2$ khi $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ x - y = 0 \Leftrightarrow x = y = 1 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$

ĐỀ 2

Bài 1: Cho biểu thức: $P=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\frac{3}{\sqrt{x}+1}+\frac{6\sqrt{x}-4}{1-x}$ với $x\ge 0;x\ne 1$.

a) $P=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\frac{3}{\sqrt{x}+1}+\frac{6\sqrt{x}-4}{1-x}$

$$=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)+3\left(\sqrt{x}-1\right)-\left(6\sqrt{x}-4\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{x-2\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$$

b) Để P = -1

$P=-1$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=-1$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}-1=-\left(\sqrt{x}+1\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}=0$

$\Leftrightarrow x=0(t/m)$

c) So sánh P với 1;

Xét hiệu P – 1 = $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}-1=\frac{\sqrt{x}-1-\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}+1}=\frac{-2}{\sqrt{x}+1}$

Vì -2 < 0; $\sqrt{x}+1>0$ nên $\frac{-2}{\sqrt{x}+1}<0$

$\Rightarrow P<1$

Bài 2: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x+3y=m(1) \\ mx+4y=3(2) \end{cases}$

a) Với $m=-2$ ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x+3y=-2 \\ -2x+4y=3 \end{cases}$

Giải được nghiệm của hệ phương trình là $\left(-\frac{17}{10};-\frac{1}{10}\right)$.

b) Từ (1) $x+3y=m \Rightarrow x=m-3y$ thế vào (2) ta được:

$$\begin{cases} x=m-3y \\ m(m-3y)+4y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=m-3y \\ (3m-4)y=m^2-3 \end{cases}$$

Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)$thì $3m-4\neq 0 \Leftrightarrow m\neq \frac{4}{3}$. Khi đó hệ phương trình có nghiệm $\left(\frac{-4m+9}{3m-4};\frac{m^2-3}{3m-4}\right)$.

Ta có $x+y=\frac{m^2-4m+6}{3m-4}=\frac{(m-2)^2+2}{3m-4}$

Ta thấy $(m-2)^2\geq 0 \Rightarrow (m-2)^2+2>0$, $\forall m$.

Để $x+y<0$ thì $3m-4<0 \Leftrightarrow m<\frac{4}{3}$. Vậy với $m<\frac{4}{3}$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn $x+y<0$.

Bài 3: Gọi chiều rộng của mảnh đất hình chữ nhật lúc ban đầu là x (m; x > 0)

Chiều dài của mảnh đất hình chữ nhật lúc ban đầu là y (m; 0 < x < y)

Vì chu vi mảnh đất hình chữ nhật là 40m nên ta có phương trình:

$(x+y).2=40 \Leftrightarrow x+y=20$ (1)

Chiều rộng tăng thêm 2m nên chiều rộng mới là: x + 2 (m)

Chiều dài giảm đi 2m nên chiều dài mới là y – 2 (m)

Vì diện tích mảnh đất tăng thêm 4m^2 nên ta có phương trình:

$(x+2)(y-2)-xy=4 \Leftrightarrow -2x+2y=8 \Leftrightarrow -x+y=4$ (2)

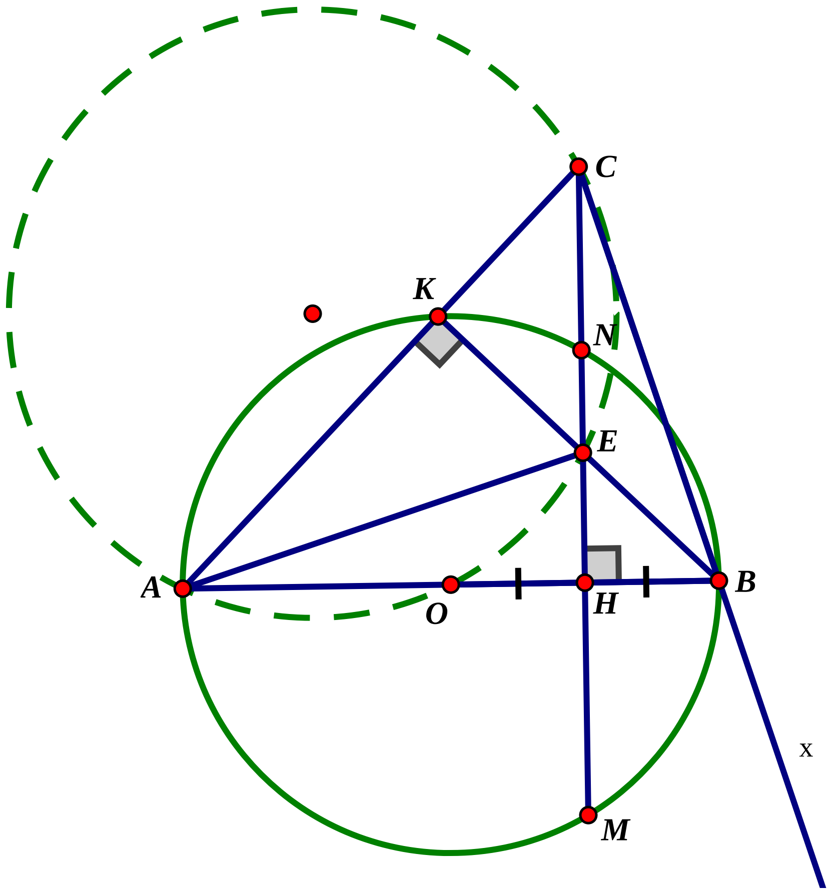
Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y=20 \\ -x+y=4 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình tìm được $\begin{cases} x=8 \\ y=12 \end{cases} (t/m)$

Vậy chiều dài mảnh đất ban đầu là 12m; chiều rộng mảnh đất ban đầu là 8m

Bài 4: Cho đường tròn (O), đường kính $AB=2R$. H là trung điểm của OB, dây MN vuông góc với AB tại H. C là điểm nằm trên tia đối của tia NM. AC cắt đường tròn (O) tại K, BK cắt MN tại E.



a) Chứng minh: A, K, E, H cùng thuộc một đường tròn

b) Chứng minh: $CK.CA = CH^2 - HM^2$

xét ΔEKC và ΔAHC

$EKC = AHC = 90^0$

ACH chung

Suy ra $\Delta EKC \sim \Delta AHC$ (g-g)

$$\Rightarrow \frac{KC}{HC} = \frac{EC}{AC}$$

$$\Rightarrow KC.AC = EC.HC$$

$$= HC^2 - HE.HC \quad (1)$$

Xét ΔBHE và ΔCHA

$EHB = AHC = 90^0$

$CAH = HEB (= CEK)$

$\Rightarrow \Delta BHE$ đồng dạng ΔCHA (g-g)

$\Rightarrow \frac{HE}{AH} = \frac{BH}{CH} \Rightarrow HE.CH = AH.BH$ (2)

Xét ΔAMB có $AMB = 90^0$ (vì M thuộc (O) đường kính AB) => ΔAMB vuông tại M

Có MH là đường cao (MH vuông góc với AB tại H)

Suy ra AH.BH = HM^2 (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra KC.AC = HC^2 - HM^2

c) Chứng minh: AE vuông góc BC tại P

Xét ΔABC có CH, BK là đường cao

mà CH cắt BK tại E

$\Rightarrow$ E là trực tâm tam giác

vậy AE vuông góc với BC tại P

+/ Chứng minh CB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACE

Vẽ Cx là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp ΔACE

Ta cần cm Cx trùng với CB (vẽ Cx trên nửa mặt phẳng bờ CE chứa P)

Có CA = 2R suy ra AB= CA

Suy ra ΔACB cân tại A nên AP là đường cao và đồng thời là đường phân giác

$\Rightarrow CAP = BAP$ (4)

Xét đường tròn ngoại tiếp ΔACE có

$NCx = CAP$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung với góc nội tiếp cùng chắn cung CE) (5)

Ta chứng minh

$\Delta EHA \sim \Delta EPC$ (g-g)

Suy ra $NCB = BAP$ (6)

Từ (4), (5), (6) suy ra $NCx = NCB$

Mà CB, Cx nằm trên cùng nửa mặt phẳng bờ CE chứa P

Suy ra Cx trùng CB

Hay CB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACE

Bài 5: Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+2019}+\sqrt{x+2020}=1$.

ĐK: $x\ge -2020$. Đặt $\begin{cases} a=\sqrt[3]{x+2019} \\ b=\sqrt{x+2020} \end{cases}$, $b\ge 0$. Khi đó $\begin{cases} a^3=x+2019 \\ b^2=x+2020 \end{cases} \Rightarrow a^3-b^2=-1$ Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a^3-b^2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-a \\ a^3-(1-a)^2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-a \\ a^3-a^2+2a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1(tm) \end{cases}$$

Thay vào chỗ đặt ta được $x=-2019(tm)$.

ĐỀ 3

Bài 1: Cho hai biểu thức $A=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}$ và $B=\frac{3}{\sqrt{x}+5}+\frac{20-2\sqrt{x}}{x-25}$ với $x\ge 0,\ x\ne 25$

a) Khi x = 9(tm) thay vào A có:

$$A=\frac{\sqrt{9}+2}{\sqrt{9}-5}=\frac{-5}{2}$$

b) Chứng minh $B=\frac{1}{\sqrt{x}-5}$

$$B=\frac{3}{\sqrt{x}+5}+\frac{20-2\sqrt{x}}{x-25}$$

$$=\frac{3\left(\sqrt{x}-5\right)+20-2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+5\right)\left(\sqrt{x}-5\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{x}+5}{\left(\sqrt{x}+5\right)\left(\sqrt{x}-5\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}-5}$$

c) Tìm tất cả giá trị của x để $A=B.\left|x-4\right|$

$$\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}=\frac{1}{\sqrt{x}-5}.\left|x-4\right| \Leftrightarrow \left|x-4\right|=\sqrt{x}+2$$

TH1: $x\ge 4$

$$x-4=\sqrt{x}+2$$

$$\Leftrightarrow x-\sqrt{x}-6=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x}-3=0\\ \sqrt{x}+2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=0\\ \sqrt{x}=-2\left(L\right)\end{array}\right. \Leftrightarrow x=0$$

x = 0 (Loại)

TH2: x < 4

$$x-4=-\left(\sqrt{x}+2\right)$$

$$\Leftrightarrow x+\sqrt{x}-2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x}-1=0\\ \sqrt{x}+2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=1\\ \sqrt{x}=-2\left(L\right)\end{array}\right. \Leftrightarrow x=1(t/m)$$

Vậy x = 1 thì $A=B.\left|x-4\right|$

Bài 2: Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x-3y=-6 \\ -2x+y=7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+2y}-\dfrac{3}{x-2y}=-2 \\ \dfrac{5}{x+2y}+\dfrac{6}{x-2y}=-3 \end{cases}$

Giải các hệ phương trình:

a) Đáp số $(-3;1)$

b) ĐK: $\begin{cases} x\neq 2y \\ x\neq -2y \end{cases}$ Đặt $\begin{cases} a=\dfrac{1}{x+2y} \\ b=\dfrac{1}{x-2y} \end{cases}$.

Ta có hệ phương trình mới là: $\begin{cases} a-3b=-2 \\ 5a+6b=-3 \end{cases}$. Giải ra ta được $\begin{cases} a=-1 \\ b=\dfrac{1}{3} \end{cases}$

Thay vào chỗ đặt ta có hệ $\begin{cases} x+2y=-1 \\ x-2y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} (tm)$.

Bài 3: Gọi số chi tiết máy tổ I làm là x (chi tiết máy; x $\in N^*$)

Số chi tiết máy tổ II làm là y (chi tiết máy; y $\in N^*$)

Vì trong tháng đầu cả hai tổ sản xuất được 520 chi tiết máy nên ta có phương trình:

x + y = 520 (1)

Sang tháng thứ hai, tổ I giảm 10% nên số chi tiết tổ I làm được là:

(100% - 10%)x = 90%.x = 0,9x (chi tiết máy)

Sang tháng thứ hai, tổ II giảm 15% nên số chi tiết tổ II làm được là:

(100% - 15%)y = 85%y = 0,85y (chi tiết máy)

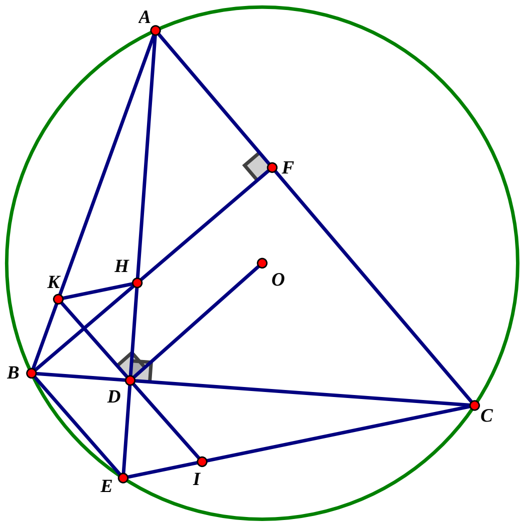
Vì sang tháng thứ hai cả hai tổ làm được 454 chi tiết máy nên ta có phương trình:

0,9x + 0,85y = 454 (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=520 \\ 0,9x+0,85y=454 \end{cases}$

Giải hệ phương trình tìm được:

Bài 4: Cho ΔABC nhọn, nội tiếp đường tròn (O). Đường cao AD, BF cắt nhau tại H. AD cắt đường tròn (O) tại E. Đường thẳng qua D và vuông góc OD cắt AB, EC lần lượt tại K, I. Chứng minh :



a) **A, B, D, F cùng thuộc một đường tròn đường kínhAB**

b) AB.CD = CE.AD

Xét ΔABD và ΔCED

$ABD = CED$ **(đđ)**

$BAD = ECD$ **(góc nội tiếp chắn BE)**

$\Rightarrow \Delta ABD$ đồng dạng ΔCED (g-g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{CE} = \frac{AD}{CD} \Rightarrow AB.CD = CE.AD$$

c) *Xét đường tròn đi qua 4 điểm **A, B, D, F**

$\Rightarrow FBD = D\text{AF}$ (góc nội tiếp chắn DF)

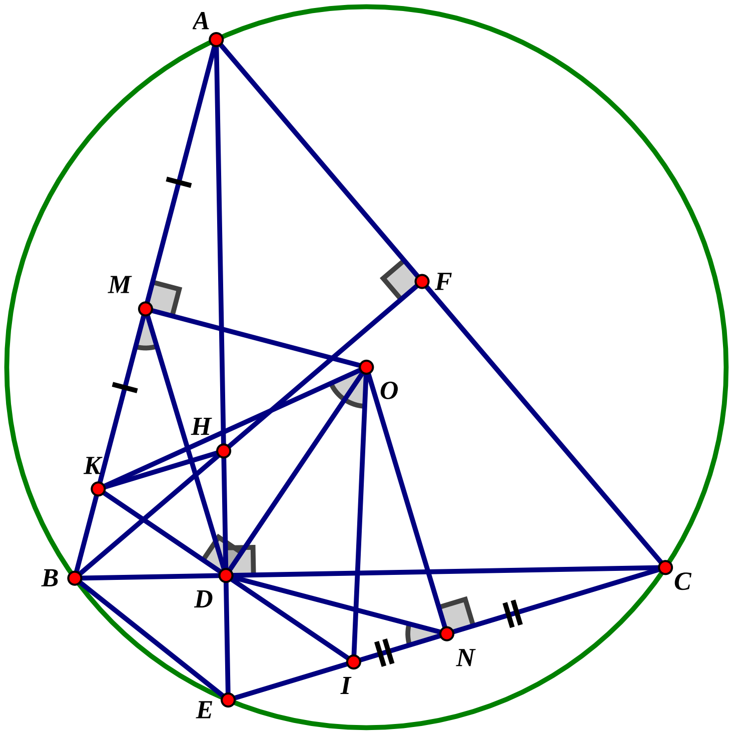
*Xét (O) : $DAC = CBE$ (góc nội tiếp chắn EC)

$\Rightarrow FBD = CBE$

* ΔBHE : BD phân giác đồng thời là đường cao

$\Rightarrow \Delta BHE$ cân tại B $\Rightarrow BD$ trung tuyến $\Rightarrow HD = DE$

d)



Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, EC

$\Rightarrow OM \perp AB, ON \perp CE$

*Bốn điểm O, M, K, D cùng thuộc đường tròn đường kính OK $\Rightarrow KMD = KOD$ (góc nội tiếp chắn KD)

*Bốn điểm O, N, I, D cùng thuộc đường tròn đường kính OI $\Rightarrow DOI = DNI$ (góc nội tiếp chắn DI)

* ΔBDA vuông tại D: DM trung tuyến $\Rightarrow DM = \frac{1}{2}AB$

Chứng minh tương tự: $\Rightarrow DN = \frac{1}{2}EC$

ΔABD đồng dạng ΔCED

$\Rightarrow \frac{AB}{CE} = \frac{BD}{DE} \Rightarrow \frac{BD}{DE} = \frac{DM}{DN} = \frac{BM}{EN}$

$\Rightarrow \Delta BDM$ đồng dạng $\Delta EDN (c.c.c) \Rightarrow BMD = DNE \Rightarrow KOD = IOD$

* ΔOKI : OD phân giác đồng thời là đường cao

$\Rightarrow \Delta OKI$ cân tại O $\Rightarrow OD$ trung tuyến $\Rightarrow DK = DI$

$\Rightarrow \Delta DHK = \Delta DIE \left(c.g.c\right) \Rightarrow DHK = DIE$

Mà hai góc ở vị trí so le trong $\Rightarrow HK//CE$

Bài 5: Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=2020$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{x^2}{x+y}+\dfrac{y^2}{y+z}+\dfrac{z^2}{z+x}\ge 1010$.

Giải:

Ta có: $\dfrac{x^2}{x+y}=x-\dfrac{xy}{x+y}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho hai số dương ta có:

$$x+y\ge 2\sqrt{xy}\Rightarrow \frac{xy}{x+y}\le \frac{xy}{2\sqrt{xy}}=\frac{\sqrt{xy}}{2}\Rightarrow \frac{x^2}{x+y}\ge x-\frac{\sqrt{xy}}{2}\ (1).$$

Tương tự ta có: $\dfrac{y^2}{y+z}\ge y-\dfrac{\sqrt{yz}}{2}$ (2) và $\dfrac{z^2}{z+x}\ge z-\dfrac{\sqrt{zx}}{2}$ (3)

Cộng từng vế của (1), (2) và (3) ta được:

$$\frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{y+z}+\frac{z^2}{z+x}\ge (x+y+z)-\frac{1}{2}(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx})$$

Theo trên: $(x+y)+(y+z)+(z+x)\ge 2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}\Rightarrow x+y+z\ge \sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}$

Vì vậy $\dfrac{x^2}{x+y}+\dfrac{y^2}{y+z}+\dfrac{z^2}{z+x}\ge \sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}-\dfrac{1}{2}(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx})$

Hay $\dfrac{x^2}{x+y}+\dfrac{y^2}{y+z}+\dfrac{z^2}{z+x}\ge 1010$ (đpcm)